Université A Mira 07/05/2011

Dpt ST2 Examen de maths 5

Ex 1 : 4pts

Les applications suivantes sont-elles holomorphes ?

a) $f(z) = z^k \quad k \in Z$ b) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$, $z = x + i\,y$

2 pts 2 pts

Ex 2 : 4 pts

Calculer $\oint_\gamma \bar{z}\ dz$ où γ est le contour fermé défini par $x = \cos t$ et $y = \sin t$.

Ex 3 : 5 pts

1) Déterminer une fonction holomorphe f dont la partie réelle est $P(x, y) = x^2 - y^2 - xy$

3

2) Ecrire f en fonction de z $(z = x + iy)$.

2

Ex 4 : 7 pts

Soit $f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$

1) Déterminer le domaine d'holomorphie de f. 1 pt
2) Déterminer les points singuliers de f en précisant la nature de chacun d'eux. 2 pts
3) Calculer $\oint_\gamma f(z)dz$ ou γ est le cercle :

$a)\ C\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $b)\ C(0,2)$.

1 pt 3 pts

Corrigé de l'examen de Math 5. (1)

Ex1 4pts

1) $f(z) = z^k \quad k \in \mathbb{Z}$

2

* Si $k \geq 0$ f est holomorphe $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow D_H = \mathbb{C}$
(fn polynomiale)

* Si $k < 0$ $f(z) = \dfrac{1}{z^{k'}}$ où $k' = -k > 0 \Rightarrow f$ est holomorphe $\forall z \in \mathbb{C}^*$

$\Rightarrow D_H = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

2) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ où $z = x+iy$

2

$= \dfrac{1}{x^2+y^2}(x - iy)$

$= \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{1}{z}$ car $|z|^2 = x^2+y^2 = z\bar{z}$

$\Rightarrow f$ est holomorphe $\forall z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow D_H = \mathbb{C}^*$

$\left[f(z) = z^k \text{ avec } k = -1\right]$

On peut aussi utiliser le fait que $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sont continues et que les C.C vérifiées.

Ex2 (4pts)

$I = \int_C \bar{z}\, dz$ où C est le cercle de centre 0 et de rayon 1 (sens +)

on a : $\bar{z} = x - iy$ $dz = dx + i dy$ avec $x = \cos t$ et $y = \sin t$
$t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} (\cos t - i\sin t)(-\sin t + i\cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\cos t\sin t + \sin t\cos t)}_{0} dt + i\int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} dt$

$= i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$

Ex3 (5pts)

1) $f(z) = P(x,y) + i\varphi(x,y)$ avec $P(x,y) = x^2 - y^2 - xy$

f est holomorphe $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = 2x - y \Rightarrow \varphi(x,y) = 2xy - \frac{y^2}{2} + C(x)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2y + C'(x)$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y - x$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow 2y + C'(x) = 2y + x \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} +$ cte réel K

$\Rightarrow \varphi(x,y) = 2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + K$

$\Rightarrow f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 - xy + i\left(2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right)$ ~~K~~

j'ai négligé K car on nous demande une fn holomorphe

2°) $f(z) = (x^2 - y^2 - xy) + 2ixy + i\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)$

$= (x^2 - y^2 + 2ixy) + \frac{i}{2}(x^2 - y^2) + i^2 xy = (x+iy)^2 + \frac{i}{2}(x+iy)^2$

$= z^2\left(1 + \frac{i}{2}\right) \quad z \in \mathbb{C}$.

Ex4 (7pts)

1) f est une fraction rationnelle elle est donc holomorphe $\forall z \in \mathbb{C}$ et vérifiant $(z^2-1)(z^2+1) \neq 0 \Rightarrow z^2 - 1 \neq 0$ et $(z^2+1)^2 \neq 0 \Rightarrow z \neq \pm 1$ et $z \neq \pm i$

1)

$D_H = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, -i, i\}$

2) D'après 1°) f a 4 points singuliers ($-1, 1, -i$ et i)

- les points $z = -1$ et $z = +1$ sont des pôles simples car.

($h_1(z) = (z-1)f(z)$ et $h_2(z) = (z+1)f(z)$ sont holomorphes resp sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, -i, i\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{1, -i, i\}$ et $h_1(1) = \frac{1}{8} \neq 0$ $h_2(-1) = \frac{1}{8} \neq 0$

2)

- les points $z = \pm i$ sont des pôles doubles de f car $h_3(z) = (z-i)^2 f(z)$ et $h_4(z) = (z+i)^2 f(z)$ sont holomorphes resp sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1, \mp i\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1, \ldots$

avec $h_3(i) \neq 0$ et $h_4(-i) \neq 0$.

Ex 1 (3°)

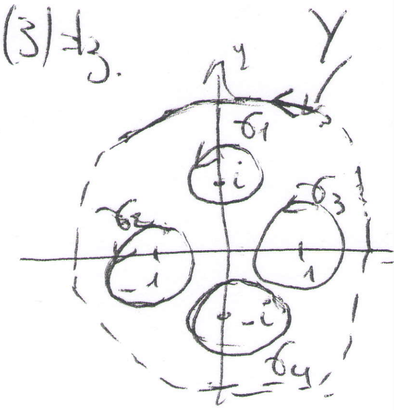
a) $\gamma = \mathcal{C}(0, \frac{1}{2})$, f est holomorphe à l'intérieur et sur le cercle $\mathcal{C}(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

1)

b) $\gamma = \mathcal{C}(0, 2)$ parcouru dans le sens >0.

les points $-1, 1, -i$ et i sont à l'intérieur de γ.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\delta_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2} f(z)\,dz + \int_{\delta_3} f(z)\,dz + \int_{\delta_4} f(z)\,dz.$$



3)

$$\cdot \int_{\delta_1} f(z)\,dz = \int_{\delta_1} \frac{g(z)}{(z-i)^2}\,dz \quad \text{où} \quad g(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z+i)^2}$$

g est holomorphe à l'intérieur et sur $\delta_1 \Rightarrow$

$$\int_{\delta_1} \frac{g(z)}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, g'(i)$$

$$\cdot \int_{\delta_2} f(z)\,dz = \int_{\delta_2} \frac{g_1(z)}{z+1}\,dz \quad \text{où} \quad g_1(z) = \frac{z}{(z-1)(z+i)^2(z-i)^2}$$

g_1 est holomorphe à l'intérieur et sur ~~la frontière~~ $\delta_1 \Rightarrow$

$$\int_{\delta_2} \frac{g_1(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\, g_1(-1)$$

$$\cdot \int_{\delta_3} f(z)\,dz = \int_{\delta_3} \frac{g_2(z)}{(z-1)}\,dz \quad \text{avec} \quad g_2(z) = \frac{z}{(z+1)(z+i)^2(z-i)^2}$$

g_2 est holomorphe à l'intérieur et sur $\delta_3 \Rightarrow$.

$$\int_{\delta_3} f(z)\,dz = 2\pi i\, g_2(+1)$$

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = \int_{\gamma_4} \frac{g_3(z)}{(z+i)^2}\,dz \quad \text{où} \quad g_3(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z-i)^2}$$

g_3 est holomorphe à l'intérieur et sur γ_4

$$\Rightarrow \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 2\pi i\, g_3'(\cancel{z}i)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(g'(i) + g_1(-1) + g_2(1) + g_3'(-i) \right)$$

Le calcul des deux dérivées nous donne :

$$g'(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z+i)^2} - \frac{2z^2}{(z^2-1)^2(z+i)^2} - \frac{2z}{(z^2-1)(z+i)^3}$$

et

$$g_3'(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z-i)^2} - \frac{2z^2}{(z^2-1)^2(z-i)^2} - \frac{2z}{(z^2-1)(z-i)^3}$$