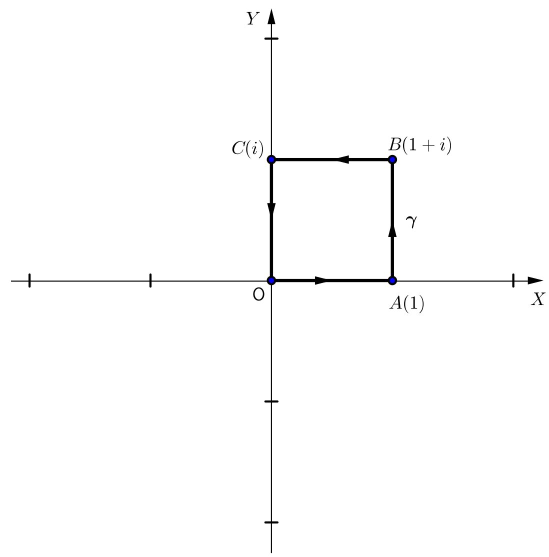
Université A/MIRA de Béjaia — 26 juin 2012
Faculté de la Technologie
Département ST 2

# Examen de rattrapage de Maths 5

**Exercice 1 (3,5 points)**
En utilisant les paramétrisations, montrer que l'on a :

$$\oint_\gamma z^2 dz \;=\; 0,$$

où $\gamma$ est la courbe ci-contre.
— Comment peut-on prédire ce résultat sans calculs ? (citer le théorème en question).




**Exercice 2 (5 points)**
Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = \mathrm{u}(x, y) + i\,\mathrm{v}(x, y),$$

où $z = x + iy$, $\mathrm{u} = \mathrm{Re}f$ et $\mathrm{v} = \mathrm{Im}f$.
On donne :

$$\mathrm{v}(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + x + 1.$$

1. Déterminer $\mathrm{u}(x, y)$ sachant que $f(i) = 0$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de $z$.

**Exercice 3 (6 points)**
Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions suivantes autour du point singulier indiqué et préciser la nature du point singulier en question.

1. $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2z}$ ; $\qquad z_0 = 0.$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$ ; $\qquad z_0 = 0.$
3. $f(z) = z^2 \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ; $\qquad z_0 = 0.$

**Exercice 4 (7 points)**
Soit $f$ la fonction d'une variable complexe définie par :

$$f(z) = \frac{3z+2}{2z^2+5z-3}.$$

1. Déterminer le domaine d'holomorphie de $f$.
2. Donner les points singuliers de $f$ en précisant la nature de chacun d'entre eux.
3. Soit $C$ le cercle défini par : $|z-1| = 2$, orienté positivement.
   (a) Tracer $C$ dans un plan muni d'un repère orthonormé.
   (b) Calculer par la méthode de votre choix l'intégrale curviligne :

$$\oint_C f(z)dz\,.$$

BONNE CHANCE

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2

26 juin 2012

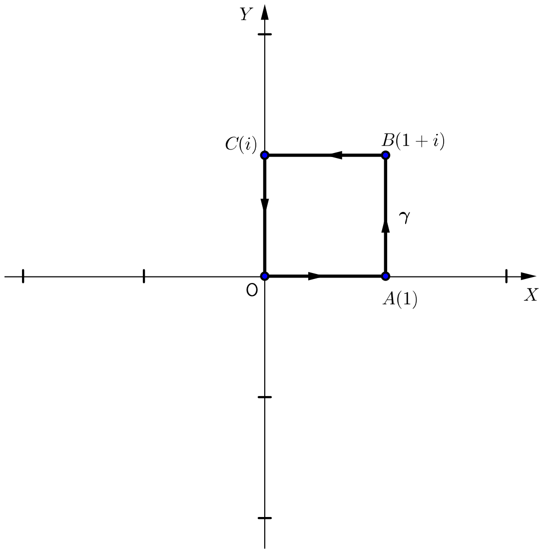
# Solution détaillée de l'Examen de rattrapage de Maths 5

B. Farhi

**Exercice 1 (3,5 points)**
En utilisant les paramétrisations, montrer que l'on a :

$$\oint_\gamma z^2 dz \; = \; 0,$$

où $\gamma$ est la courbe ci-contre.
— Comment peut-on prédire ce résultat sans calculs ? (citer le théorème en question).




**Solution :**
L'intégrale $\oint_\gamma z^2\,dz$ se décompose en :

$$\begin{aligned}\oint_\gamma z^2\,dz &= \int_{OA} z^2\,dz + \int_{AB} z^2\,dz + \int_{BC} z^2\,dz + \int_{CO} z^2\,dz \qquad \checkmark \ 0{,}5 \\ &= \int_{OA} z^2\,dz + \int_{AB} z^2\,dz - \int_{CB} z^2\,dz - \int_{OC} z^2\,dz \qquad (1)\end{aligned}$$

Sur $OA$ : On peut utiliser comme paramétrisation : $z = x$, avec $x \in [0,1]$. Ce qui donne $dz = dx$ et par conséquent :

$$\int_{OA} z^2\,dz = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3};$$

soit

$$\int_{OA} z^2 dz = \frac{1}{3} \qquad \checkmark \ 0{,}5 \qquad \textbf{(a)}$$

Sur $AB$ : On peut utiliser comme paramétrisation : $z = 1 + iy$, avec $y \in [0,1]$. Ce qui donne $dz = i\,dy$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_{AB} z^2\,dz = \int_0^1 (1+iy)^2 i\,dy = \int_0^1 i(1-y^2+2iy)\,dy = \int_0^1 (i - iy^2 - 2y)\,dy &= \left[iy - \frac{i}{3}y^3 - y^2\right]_0^1 \\ &= \left(i - \frac{i}{3} - 1\right) - 0 = -1 + \frac{2}{3}i;\end{aligned}$$

soit

$$\int_{AB} z^2\,dz = -1 + \frac{2}{3}i \qquad \checkmark \quad 0{,}5 \tag{b}$$

<u>Sur $CB$ :</u> On peut utiliser comme paramétrisation : $z = x + i$, avec $x \in [0,1]$. Ce qui donne $dz = dx$ et par conséquent :

$$\int_{CB} z^2\,dz = \int_0^1 (x+i)^2\,dx = \int_0^1 (x^2 - 1 + 2ix)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + ix^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 + i\right) - 0 = -\frac{2}{3} + i\,;$$

soit

$$\int_{CB} z^2 dz = -\frac{2}{3} + i \qquad \checkmark \quad 0{,}5 \tag{c}$$

<u>Sur $OC$ :</u> On peut utiliser comme paramétrisation : $z = iy$, avec $y \in [0,1]$. Ce qui donne $dz = i\,dy$ et par conséquent :

$$\int_{OC} z^2\,dz = \int_0^1 (iy)^2 i\,dy = \int_0^1 (-iy^2)\,dy = \left[-\frac{i}{3}y^3\right]_0^1 = -\frac{i}{3} - 0 = -\frac{i}{3}\,;$$

soit

$$\int_{OC} z^2\,dz = -\frac{1}{3}i \qquad \checkmark \quad 0{,}5 \tag{d}$$

En substituant (**a**), (**b**), (**c**) et (**d**) dans (1), on obtient finalement :

$$\oint_\gamma z^2\,dz = \frac{1}{3} + \left(-1 + \frac{2}{3}i\right) - \left(-\frac{2}{3} + i\right) - \left(-\frac{1}{3}i\right) = \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}i - i + \frac{1}{3}i\right) = 0\,; \qquad \checkmark \quad 0{,}5$$

soit $\oint_\gamma z^2\,dz = 0$, comme il fallait le prouver.

— On peut prédire ce résultat sans calculs en utilisant <u>le théorème intégrale de Cauchy</u>, selon lequel : ✓ 0,5

L'intégrale sur un chemin <u>fermé</u> d'une fonction <u>holomorphe</u> à l'intérieur et sur le chemin en question est <u>nulle</u>.

Ici la fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (car $f$ est un polynôme) ; en particulier, $f$ est holomorphe sur et à l'intérieur du chemin fermé $\gamma$.

**Exercice 2 (5 points)**
Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = \mathrm{u}(x,y) + i\,\mathrm{v}(x,y),$$

où $z = x + iy$, $\mathrm{u} = \mathrm{Re} f$ et $\mathrm{v} = \mathrm{Im} f$.
On donne :

$$\mathrm{v}(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy + x + 1.$$

1. Déterminer $\mathrm{u}(x,y)$ sachant que $f(i) = 0$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de $z$.

**Solution :**
**1)** La fonction $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elle satisfait les conditions de Cauchy-Riemann, qui sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = -\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} \end{cases} \qquad \checkmark \quad 0{,}5 \tag{$I$}$$

On a $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y + 1$ et $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(x,y) = -2y + 2x$. D'où :

$$(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(x,y) = -2y + 2x & \ldots\ldots(2) \\[2ex] \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(x,y) = -2x - 2y - 1 & \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

On a :

$$(2) \iff \mathrm{u}(x,y) = \int (-2y+2x)\,dx$$
$$\iff \mathrm{u}(x,y) = -2xy + x^2 + c(y) \qquad ......(4) \qquad \checkmark \ \boxed{1}$$

(où $c(y)$ est une fonction de $y$).
En substituant (4) dans (3), on obtient :

$$-2x + c'(y) = -2x - 2y - 1\,.$$

Ce qui donne :

$$c'(y) = -2y - 1\,.$$

D'où :

$$c(y) = \int (-2y-1)\,dy = -y^2 - y + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})\,. \qquad \checkmark \ \boxed{1}$$

En substituant ceci dans (4), on obtient :

$$\mathrm{u}(x,y) = -2xy + x^2 - y^2 - y + k \tag{5}$$

Il nous reste maintenant à déterminer la constante réelle $k$ en se servant de la condition $f(i) = 0$. On a :

$$f(i) = 0 \iff \mathrm{u}(0,1) + i\,\mathrm{v}(0,1) = 0$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{u}(0,1) = 0 \\ \mathrm{v}(0,1) = 0 \end{array} \right. .$$

L'égalité $\mathrm{v}(0,1) = 0$ est visiblement vérifiée. L'égalité $\mathrm{u}(0,1) = 0$ équivaut (en utilisant (5)) à : $-2 + k = 0$, ce qui donne :

$$k = 2\,. \qquad \checkmark \ \boxed{0{,}5}$$

En substituant ceci dans (5), on obtient finalement :

$$\boxed{\mathrm{u}(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - y + 2}\,.$$

**2)** On a pour $z = x + iy$ :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \mathrm{u}(x,y) + i\,\mathrm{v}(x,y) \\
&= (x^2 - y^2 - 2xy - y + 2) + i\,(x^2 - y^2 + 2xy + x + 1) \\
&= (x^2 - y^2 + 2ixy) + (-2xy + ix^2 - iy^2) + (-y + ix) + 2 + i \qquad \checkmark \ \boxed{2} \\
&= (x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + 2 + i \\
&= z^2 + iz^2 + iz + 2 + i \\
&= (1+i)z^2 + iz + 2 + i\,.
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f(z) = (1+i)z^2 + iz + 2 + i}\,.$$

**Exercice 3 (6 points)**
Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions suivantes autour du point singulier indiqué et préciser la nature du point singulier en question.

1. $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2z}\,; \qquad z_0 = 0.$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}\,; \qquad z_0 = 0.$
3. $f(z) = z^2 \cos\left(\dfrac{1}{z}\right); \qquad z_0 = 0.$

**Solution :**

**1)** Le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto e^z$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad \checkmark \ 0{,}5 \tag{6}$$

En substituant $z$ par $-z$ dans ce développement, on obtient le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto e^{-z}$ au voisinage de 0 :

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad \checkmark \ 0{,}5 \tag{7}$$

En utilisant (6) et (7), on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z}(e^z - e^{-z}) \\ &= \frac{1}{2z}\left\{\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2z}\left(2z + 2\frac{z^3}{3!} + 2\frac{z^5}{5!} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots, \qquad \checkmark \ 1 \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f(z) = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots},$$

qui est le développement en série de Laurent de $f$ autour de $z_0 = 0$.
On constate que la partie principale* de ce développement est nulle ; ce qui montre que $z_0 = 0$ est une singularité éliminable (ou fausse singularité) de $f$. ✓ 0,5

**2)** Le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \qquad \checkmark \ 0{,}5$$

Il suffit de diviser les deux membres de cette identité sur $z^2$ pour obtenir :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - \dots}, \qquad \checkmark \ 0{,}5$$

qui est le développement en série de Laurent de $f$ autour du point singulier $z_0 = 0$.
On constate que la partie principale de ce développement comporte un nombre fini de termes (deux termes) ; la plus petite puissance de $z - z_0 = z$, figurant dans cette partie, étant $\alpha = -2$. Ceci montre que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2 (c'est-à-dire un pôle double) de $f$. ✓ 0,5

**3)** Le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto \cos z$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \qquad \checkmark \ 0{,}5$$

En substituant dans ce développement $z$ par $\frac{1}{z}$, on obtient le développement en série de Laurent de la fonction $z \mapsto \cos(\frac{1}{z})$ autour de son point singulier $z_0 = 0$ ; soit

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots \qquad \checkmark \ 0{,}5$$

∗. C'est-à-dire la partie comportant les puissances strictement négatives de $z - z_0 = z$.

En multipliant finalement les deux membres de cette dernière identité par $z^2$, on obtient :

$$\boxed{f(z) = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots}, \quad \checkmark \quad 0{,}5$$

qui est le développement en série de Laurent de $f$ autour du point singulier $z_0 = 0$.
On constate que la partie principale de ce développement comporte une infinité de termes ; ce qui montre que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de $f$. ✓ 0,5

**Exercice 4 (7 points)**
Soit $f$ la fonction d'une variable complexe définie par :

$$f(z) = \frac{3z+2}{2z^2+5z-3}.$$

1. Déterminer le domaine d'holomorphie de $f$.
2. Donner les points singuliers de $f$ en précisant la nature de chacun d'entre eux.
3. Soit $C$ le cercle défini par : $|z-1| = 2$, orienté positivement.
   (a) Tracer $C$ dans un plan muni d'un repère orthonormé.
   (b) Calculer par la méthode de votre choix l'intégrale curviligne :

$$\oint_C f(z)\, dz.$$

**Solution :**
**1)** Comme $f$ est une fonction rationnelle alors son domaine d'holomorphie coïncide avec son domaine de définition $\mathscr{D}_f$. On a :

$$\mathscr{D}_f = \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, 2z^2+5z-3 \neq 0\right\}.$$

Résolvons l'équation de second degré : $2z^2+5z-3 = 0$. Son discriminant vaut :

$$\Delta = 5^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49.$$

L'équation possède donc deux racines complexes distinctes :

$$z_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$z_2 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3.$$

D'où :

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}\ ;\ -3\right\}}, \quad \checkmark \quad 1$$

ce qui est le domaine d'holomorphie de $f$.

**2)** Les points singuliers de $f$ sont les points où $f$ n'est pas définie. Ce sont donc les points :

$$z_1 = \frac{1}{2} \text{ et } z_2 = -3. \quad \checkmark \quad 0.5$$

Pour déterminer la nature de chacun de ces deux points singuliers, on se sert de la factorisation du trinôme $(2z^2+5z-3)$ en :

$$2z^2+5z-3 = 2(z-z_1)(z-z_2) = 2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3).$$

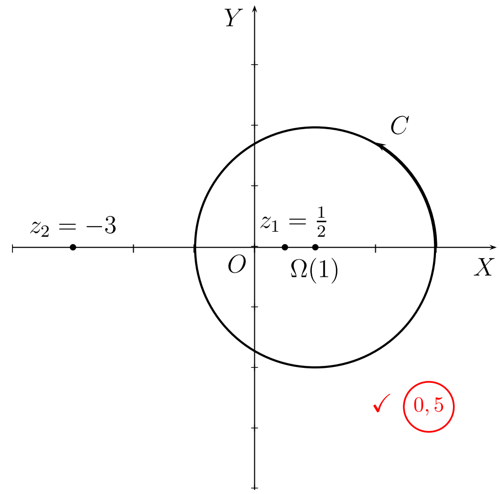
Nature du point singulier $z_1 = 1/2$ :
On a : $f(z) = \dfrac{3z+2}{2z^2+5z-3} = \dfrac{3z+2}{2(z-1/2)(z+3)} = \dfrac{g(z)}{z-\frac{1}{2}}$, avec $g(z) := \dfrac{3z+2}{2(z+3)}$.
Comme $g(1/2) = \dfrac{3(1/2)+2}{2(1/2+3)} \neq 0$ alors $z_1 = \frac{1}{2}$ est un pôle d'ordre 1 (c'est-à-dire un pôle simple) de $f$. ✓ 1

Nature du point singulier $z_2 = -3$ :

On a : $f(z) = \dfrac{3z+2}{2z^2+5z-3} = \dfrac{3z+2}{2(z-1/2)(z+3)} = \dfrac{h(z)}{z+3}$, avec $h(z) := \frac{3z+2}{2(z-1/2)} = \frac{3z+2}{2z-1}$.

Comme $h(-3) = \frac{3(-3)+2}{2(-3)-1} \neq 0$ alors $z_2 = -3$ est un pôle d'ordre 1 (c'est-à-dire un pôle simple) de $f$. ✓ 1

**3)** On donnera deux méthodes pour évaluer l'intégrale curviligne $\oint_C f(z)dz$, où $C$ Étant le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon 2, orienté positivement.




1ère méthode : (on utilise le théorème des résidus)

Le seul point singulier de $f$ qui se trouve à l'intérieur de $C$ est $z_1 = \frac{1}{2}$. De plus, $f$ est holomorphe à l'intérieur de $C$ (et sur $C$) sauf en $z_1 = \frac{1}{2}$. ✓ 0,5

D'après le théorème des résidus, ✓ 0,5 on a :

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f\,;\,\frac{1}{2}\right).$$ ✓ 0,5

Comme $z_1 = \frac{1}{2}$ est un pôle simple de $f$, on a :

$$\operatorname{Res}\left(f\,;\,\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{3z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3)} = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{3z+2}{2(z+3)} = \frac{3(\frac{1}{2})+2}{2(\frac{1}{2}+3)} = \frac{7/2}{7} = \frac{1}{2}.$$ ✓ 1

D'où l'on tire :

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\pi i}.$$ ✓ 0,5

2nde méthode : (on utilise la formule intégrale de Cauchy)

On a $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-\frac{1}{2}}$, avec $g(z) := \frac{3z+2}{2(z+3)}$. Comme $g$ est une fonction rationnelle bien définie à l'intérieur de $C$ et sur $C$ alors $g$ est holomorphe à l'intérieur de $C$ et sur $C$. ✓ 0,5

Le point $z_1 = \frac{1}{2}$ étant à l'intérieur de $C$. ✓ 0,5

On a donc d'après la formule intégrale de Cauchy : ✓ 0,5

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{z-\frac{1}{2}}\,dz,$$ ✓ 0,5

soit

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz.$$ ✓ 0,5

Ce qui donne finalement : $\oint_C f(z)\,dz = \boxed{\pi i}$. ✓ 0,5

FIN