Maths 06 Université A.MIRA — Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie — $2^{\text{ième}}$ Année

® 2013–2014

♣— Examen Final d'Analyse Numérique —♣

Exercice 1 (10.00 points) : Soit l'équation suivante :

$$F(x) = 10x - 9e^{-x} = 0. \tag{1}$$

I–
1. Séparer graphiquement les racines de l'équation (1).
2. Montrer que l'équation (1) admet une racine unique α sur l'intervalle $I = [0, 1]$.
3. Déterminer le nombre minimal d'iterations nécessaires pour approcher, par la méthode de dichotomie, avec une précision $\epsilon = 10^{-6}$, la racine de l'équation (1) située sur l'intervalle I.
4. Calculer les trois premiers itérés.

II–
1. Écrire la suite de Newton associée à l'équation (1).
2. Vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton.
3. Pour $x_0 = 0$, calculer les quatre premières itérations. Conclure.

III– On considère maintenant la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$, avec

$$g(x_n) = \frac{9}{10}e^{-x_n}. \tag{2}$$

1. Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation $x = g(x)$.
2. Montrer que la méthode donnée en (2) est convergente dans l'intervalle I.
3. Pour $x_0 = 0$, déterminer le nombre d'iterations nécessaires pour approcher la racine de l'équation (1) située sur l'intervalle I, avec une précision $\epsilon = 10^{-6}$.
4. Calculer les quatre premières itérations.

Barème détaillé de l'exercice 1 :
I $- 0.75 + 01.00 + 00.75 + 00.75$, **II** $- 00.50 + 01.25 + 01.00 + 00.25$, **III** $- 00.50 + 01.50 + 00.75 + 01.00$

Exercice 2 (10.00 points) : On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -x_1 + x_3 - 3x_2 = 2. \end{cases} \tag{3}$$

1. Résoudre le système (3) en utilisant la méthode de Cramer.
2. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss, déterminer le vecteur solution $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ et déduire le déterminant de A.
3. En utilisant la décomposition LU :
   - **a-** Déterminer la matrice A^{-1} et déduire son déterminant.
   - **b-** Déduire la solution du système $AX = b$.
   - **c-** Résoudre le système (3).
4. Peut-on appliquer la décomposition de *Cholesky* ? Justifier.

Barème détaillé de l'exercice 2 : $01.25 + 02.00 + 06.00 + 00.75$

La rédaction claire et rigoureuse est exigée !

Bon Courage
✓ *Mr Boualem*

Corrigé de L'EXAMEN Maths 06

Exercice N° 01 :

$$F(x) = 10x - 9e^{-x} = 0 \quad \dots (1)$$

I) 1-

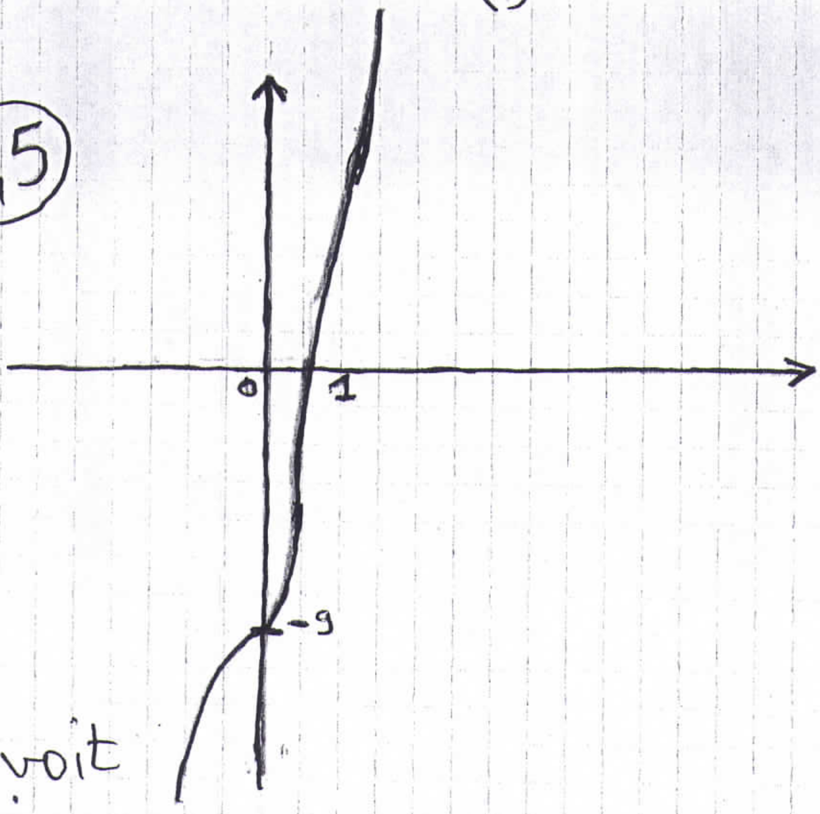
$D_F = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

0,5

$F'(x) = 10 + 9e^{-x} > 0$



D'après le graphe on voit bien que y a une racine $\alpha \in [0, 1]$ 0,25

2) Il suffit de vérifier les conditions du T.V.I.

- La fonction F est définie et continue sur I (claire)
- $F(0) = -9$, $F(1) = 6{,}689$ $\Big\}$ $F(0)F(1) < 0$

$\Big]$ • il $\exists$ au moins une racine α dans $]0, 1[$ / $F(\alpha) = 0$ 1

- $F'(x) = 10 + 9e^{-x} > 0, \forall x \in I \Rightarrow F \nearrow$

Par conséquent, la racine α est unique sur I.

3) Le nombre d'itération de Dichotomie :

D'après la formule de cours :

$$n > \frac{\ln\left|\frac{b-a}{\varepsilon}\right|}{\ln 2} - 1 = 18{,}93 \Longrightarrow n = 19$$ 0,75

4) Calcul des itérations :

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$ 0,25

$x_1 = 0{,}75$ 0,25

$x_2 = 0{,}625$ 0,25

II - Newton

1 - La suite de Newton, pour $x_0 \in I$

$$\begin{cases} x_0 \in I = [0,1] \text{ choisi} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour notre cas :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{10x - 9e^{-x}}{10 + 9e^{-x}}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ 0,5

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \frac{9e^{-x_n}(x_n + 1)}{10 + 9e^{-x_n}}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2) Les conditions d'applications de Newton :

- La fonction F est de classe $C^2(I)$ (voir I-1)
- $F(0)\,F(1) < 0$ (voir I-2).
- $F'(x) = 10 + 9e^{-x} > 0$, $\forall x \in I$. ($F'(x) \neq 0$)
- $F''(x) = -9e^{-x} < 0$, $\forall x \in I$ (garde un signe constant)
- Pour $x_0 = 0$ (choisi) :

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = -9 \\ F''(0) = -9 \end{array}\right\} \Longrightarrow F(0)\,F''(0) > 0.$$

1,25

Alors la suite de Newton (voir II-1) converge vers la racine unique α sur I, pour $x_0 = 0$.

3) Les itérations de la méthode de Newton :

- Pour $n = 0$: $x_1 = 0{,}4737$,
- Pour $n = 1$: $x_2 = 0{,}5293$,
- Pour $n = 2$: $x_3 = 0{,}5298$,
- Pour $n = 3$: $x_4 = 0{,}5298$.

1

Conclusion : La racine α à 10^{-4} est donnée par $x_3 = 0{,}5298$.

0,25

III. — o — o — Point Fixe — o — o —

$$x = g(x) = \frac{9}{10} \cdot e^{-x}$$

1) $F(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - 9e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{9}{10} e^{-x}$ 0,5

$\Leftrightarrow x = g(x)$

2) La convergence de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$

a. Stabilité : $g(I) \subset I = [0,1]$

$g'(x) = \frac{-9}{10} e^{-x} < 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow g \downarrow$

$g(I) = [g(1), g(0)] = [0.33, 0.9] \subset [0,1]$

D'où g est stable. 0,75

b) Contractance : $\exists k \,/\, 0 < k < 1$, avec

$k = \max_{x \in I} \{|g'(x)|\} = \max_{x \in I} \{g(x)\} = 0,9 < 1$

car $|g'(x)| = g(x)$. 0,75

Alors la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α de $F(x) = 0$.

3) Nombre d'itérations de Point fixe :

D'après le cours : $n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{(1-k)\,\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln k}$ avec

$K = 0,9 \quad , \; x_0 = 0 \quad , \; \varepsilon = 10^{-6}$

$x_1 = g(x_0) = \frac{9}{10} = 0,9$ 0,75

A. N :

$n > 151,98 \Rightarrow n = 152$

4) Les itérations de Point fixe :

$x_1 = g(x_0) = g(0) = 0,9$ ✓

$x_2 = g(x_1) = 0,3659$ ✓ 1

$x_3 = g(x_2) = 0,6242$ ✓

$x_4 = g(x_3) = 0,4821$ ✓

~~Conclusion~~ :

- Exercice N°02 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} , \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Résoudre le système $AX = b$ en utilisant Cramer

On a $\det(A) = -1 \neq 0$ donc le système (3) admet une unique solution. 0,5

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A} \quad , \; i = \overline{1,3}$$

0,75

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = -3 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 1 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 2$$

$x = (-3, 1, 2)^t$ est la solution du système (3)

2) Par la méthode d'élimination de Gauss :

$$\begin{array}{c} a_{11}^{(0)} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} a_{22}^{(1)} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} a_{33}^{(2)} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

$\tilde{A}$ = 0,75

$\tilde{b}$ = 0,25

Déterminer le vecteur x :

$$A\,x = b \iff \tilde{A}\,x = \tilde{b}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D'où $x = (-3, 1, 2)^t$ 0,5

Déduire $\det(A)$:

0,5

$$\det(A) = \det(\tilde{A}) = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}^{(i-1)} = a_{11}^{(0)}\, a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(2)}$$
$$= (1) \times (-1) \times (1) = -1$$

3) En utilisant la décomposition LU :

$$\begin{cases} \cdot\ \Delta_1 = 1 \neq 0 \\ \cdot\ \Delta_2 = -1 \neq 0 \\ \cdot\ \Delta_3 = \det(A_3) = \det(A) = -1 \neq 0 \end{cases} \quad 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad A = LU$$

On pose :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ 0{,}75, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ 0{,}75$$

4) Déterminer A^{-1} :

On a : $\det(A) = -1 \neq 0$ donc A^{-1} existe. 0,5

On pose :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{matrix}}_{V_1} & \underbrace{\begin{matrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{matrix}}_{V_2} & \underbrace{\begin{matrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{matrix}}_{V_3} \end{pmatrix}$$

On a

$$AA^{-1} = I_3 \iff A(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\iff \begin{cases} Av_1 = e_1 \\ Av_2 = e_2 \\ Av_3 = e_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} L\underbrace{Uv_1}_{y_1} = e_1 \\ L\underbrace{Uv_2}_{y_2} = e_2 \\ L\underbrace{Uv_3}_{y_3} = e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} Ly_1 = e_1 \\ Uv_1 = y_1 \end{cases} \quad \text{(I)} \\ \begin{cases} Ly_2 = e_2 \\ Uv_2 = y_2 \end{cases} \quad \text{(II)} \\ \begin{cases} Ly_3 = e_3 \\ Uv_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) : $\begin{cases} y_1 = (1, -2, 3)^t \\ v_1 = (-12, 5, 3)^t \end{cases}$ 0,5

De (II) : $\begin{cases} y_2 = (0, 1, -1)^t \\ v_2 = (5, -2, -1)^t \end{cases}$ 0,5

De (III) : $\begin{cases} y_3 = (0, 0, 1)^t \\ v_3 = (-3, 1, 1) \end{cases}$ 0,5

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{\det(I_3)}{\det(A)} = \frac{1}{-1} = -1$$ 0,25

b) Déduire la solution du système $AX = b$:

$$Ax = b \iff A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\iff X = A^{-1}b$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $X = (-3, 1, 2)^t$ 0,5

c) Résoudre le système $AX = b$:

$$AX = b \iff L\underbrace{Ux}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \ldots (1) \\ Ux = y \ldots (2) \end{cases}$$

De (1) : $y = (1, 1, 2)^t$ 0,5

De (2) : $X = (-3, 1, 2)^t$ 0,5

4) La décomposition de Cholesky :

- A est symétrique :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq A$$ 0,75

donc A n'est pas symétrique.

Alors la méthode de Cholesky n'est pas souhaitable.

Mer Boualem