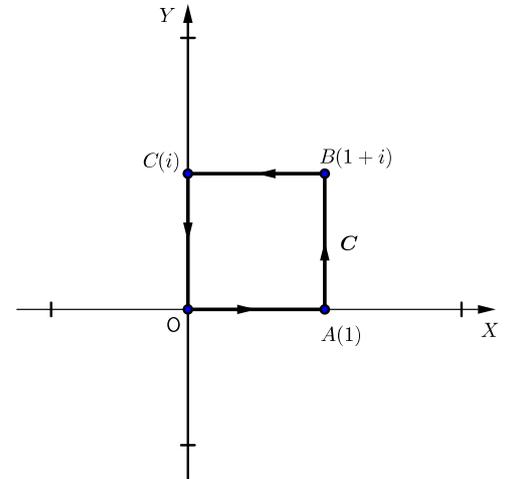


Exercice 1 (3 points) :

En utilisant des paramétrisations, calculer l'intégrale curviligne :

$$\oint_C z \bar{z} dz,$$

où C est le carré ($OABC$), orienté positivement (voir la figure ci-contre).



Exercice 2 (5 points) :

Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

où $z = x + i y$, $u = \text{Re} f$ et $v = \text{Im} f$.

On donne :

$$v(x, y) = -x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 3.$$

1. Déterminer $u(x, y)$ sachant que $f(1 - i) = i$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de z .

Exercice 3 (6 points) :

Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions complexes suivantes autour du point singulier indiqué puis préciser la nature du point singulier en question ainsi que le résidu en ce point.

i) $f(z) = z^2 e^{-1/z}$, $z_0 = 0$;

ii) $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)^2}$, $z_0 = 0$;

iii) $f(z) = \frac{e^{-3z^2} + z \sin 3z - 1}{z^6}$, $z_0 = 0$.

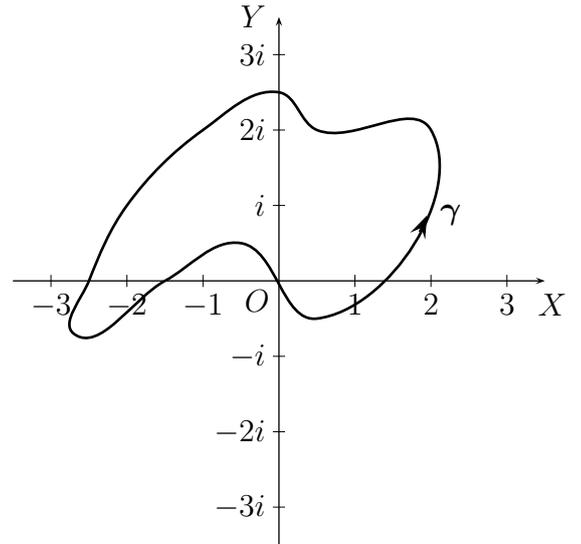
Exercice 4 (6 points) :

Soit f la fonction complexe à variable complexe, définie par :

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)^2(z^2+4)}.$$

1. Déterminer les singularités de f tout en précisant la nature de chacune d'entre elles.
2. Calculer les résidus de f en chacune de ses singularités.

3. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale curviligne $\oint_{\gamma} f(z) dz$, où γ est la courbe ci-contre.



4. Soit R un nombre réel strictement positif et différent de 2. On note par C_R le cercle de centre O et de rayon R , orienté positivement. Montrer, en distinguant les cas, que l'on a :

$$\oint_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Bonne chance à tous

Solution détaillée de l'Examen de Maths 5 (année 2012 - 2013)

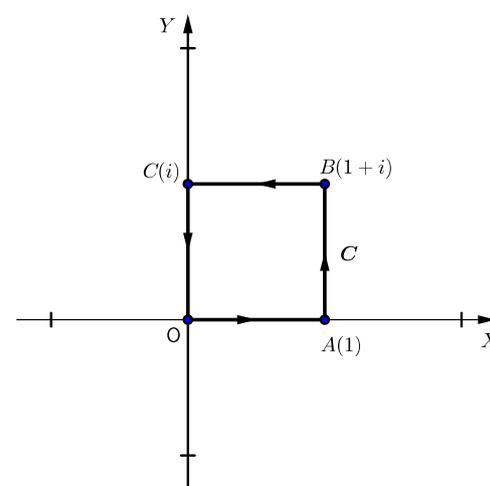
B. FARHI

Exercice 1 (3 points) :

En utilisant des paramétrisations, calculer l'intégrale curviligne :

$$\oint_C z \bar{z} dz,$$

où C est le carré ($OABC$), orienté positivement (voir la figure ci-contre).



Solution : L'intégrale $\oint_C z \bar{z} dz$ se décompose en :

$$\oint_C z \bar{z} dz = \int_{OA} z \bar{z} dz + \int_{AB} z \bar{z} dz + \int_{BC} z \bar{z} dz + \int_{CO} z \bar{z} dz \quad (I)$$

Nous allons, dans ce qui suit, calculer les valeurs de chacune des 4 intégrales du membre droit de l'égalité (I) en utilisant des paramétrisations.

Calcul de $\int_{OA} z \bar{z} dz$:

Sur OA , on a $z = t$, avec $t \in [0, 1]$. D'où $z \bar{z} = |z|^2 = t^2$ et $dz = dt$. L'intégrale $\int_{OA} z \bar{z} dz$ se transforme en :

$$\int_{OA} z \bar{z} dz = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3};$$

soit

$$\int_{OA} z \bar{z} dz = \frac{1}{3} \quad (a)$$

Calcul de $\int_{AB} z \bar{z} dz$:

Sur AB , on a $z = 1 + it$, avec $t \in [0, 1]$. D'où $z \bar{z} = |z|^2 = 1 + t^2$ et $dz = i dt$. L'intégrale $\int_{AB} z \bar{z} dz$ se transforme donc en :

$$\int_{AB} z \bar{z} dz = \int_0^1 i(1 + t^2) dt = \left[i \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^1 = \frac{4}{3} i;$$

soit

$$\int_{AB} z\bar{z} dz = \frac{4}{3}i \quad (b)$$

Calcul de $\int_{BC} z\bar{z} dz$:

Sur BC , on a $z = t + i$, avec $t \in [1, 0]$. D'où $z\bar{z} = |z|^2 = t^2 + 1$ et $dz = dt$. L'intégrale $\int_{BC} z\bar{z} dz$ se transforme donc en :

$$\int_{BC} z\bar{z} dz = \int_1^0 (t^2 + 1) dt = \left[\left(\frac{t^3}{3} + t \right) \right]_1^0 = -\frac{4}{3};$$

soit

$$\int_{BC} z\bar{z} dz = -\frac{4}{3} \quad (c)$$

Calcul de $\int_{CO} z\bar{z} dz$:

Sur CO , on a $z = it$, avec $t \in [1, 0]$. D'où $z\bar{z} = |z|^2 = t^2$ et $dz = idt$. L'intégrale $\int_{CO} z\bar{z} dz$ se transforme donc en :

$$\int_{CO} z\bar{z} dz = \int_1^0 it^2 dt = \left[i \frac{t^3}{3} \right]_1^0 = -\frac{1}{3}i;$$

soit

$$\int_{CO} z\bar{z} dz = -\frac{1}{3}i \quad (d)$$

En reportant les résultats de (a), (b), (c) et (d) dans (I), on obtient finalement :

$$\oint_C z\bar{z} dz = -1 + i.$$

Exercice 2 (5 points) :

Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

où $z = x + iy$, $u = \operatorname{Re} f$ et $v = \operatorname{Im} f$.

On donne :

$$v(x, y) = -x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 3.$$

1. Déterminer $u(x, y)$ sachant que $f(1 - i) = i$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de z .

Solution :

1. La fonction f est holomorphe sur \mathbb{C} si et seulement si les fonctions réelles u et v satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, qui sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (\star)$$

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2x + 2y + 1$ et $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2y + 2x + 1$. On a donc (en vertu de (\star)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2y + 2x + 1 & \dots\dots(1) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x - 2y - 1 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

En intégrant (1) par rapport à x , on a :

$$u(x, y) = \int (2y + 2x + 1) dx ,$$

soit

$$u(x, y) = 2xy + x^2 + x + c(y) , \quad (3)$$

où $c(y)$ est une fonction de y . En reportant (3) dans (2), on obtient :

$$2x + c'(y) = 2x - 2y - 1 ,$$

d'où :

$$c'(y) = -2y - 1 .$$

Par suite :

$$c(y) = \int (-2y - 1) dy ,$$

soit

$$c(y) = -y^2 - y + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R}).$$

Et en reportant ceci dans (3), on obtient :

$$u(x, y) = 2xy + x^2 + x - y^2 - y + k ,$$

soit (en réordonnant) :

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + x - y + k \quad (4)$$

Il reste maintenant à déterminer la valeur de k en se servant de la condition $f(1 - i) = i$. On a :

$$\begin{aligned} f(1 - i) = i &\iff u(1, -1) + i v(1, -1) = i \iff \begin{cases} u(1, -1) = 0 \\ v(1, -1) = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1^2 - (-1)^2 + 2(1)(-1) + 1 - (-1) + k = 0 \\ -1^2 + (-1)^2 + 2(1)(-1) + 1 - 1 + 3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 0 \\ 1 = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

D'où $k = 0$. En reportant cette valeur de k dans (4), on obtient finalement :

$$\boxed{u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + x - y} .$$

2. On a :

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) \\ &= (x^2 - y^2 + 2xy + x - y) + i(-x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 3) \\ &= \underbrace{(x^2 - y^2 + 2ixy)}_{=z^2} + \underbrace{(2xy + i(-x^2 + y^2))}_{=-iz^2} + \underbrace{(x + iy)}_{=z} + \underbrace{(-y + ix)}_{=iz} + 3i \\ &= z^2 - iz^2 + z + iz + 3i \\ &= (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 3i . \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f(z) = (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 3i} .$$

Exercice 3 (6 points) :

Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions complexes suivantes autour du point singulier indiqué puis préciser la nature du point singulier en question ainsi que le résidu en ce point.

i) $f(z) = z^2 e^{-1/z}$, $z_0 = 0$;

ii) $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)^2}$, $z_0 = 0$;

iii) $f(z) = \frac{e^{-3z^2} + z \sin 3z - 1}{z^6}$, $z_0 = 0$.

Solution :

i) Le développement de Taylor de la fonction exponentielle au voisinage de 0 s'écrit :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

En substituant dans ce développement z par $(-1/z)$, on obtient :

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} - \dots \quad (\forall z \in \mathbb{C}^*).$$

En multipliant finalement par z^2 , il vient que :

$$f(z) = \underbrace{z^2 - z + \frac{1}{2}}_{\text{Partie analytique}} - \underbrace{\frac{1}{6z} + \frac{1}{24z^2} - \dots}_{\text{Partie principale}} \quad (\forall z \in \mathbb{C}^*),$$

ce qui est le développement de f en série de Laurent autour du point singulier $z_0 = 0$.

— On constate que la partie principale de ce développement comporte une infinité de termes, ce qui montre que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de f .

Enfin, le résidu de f en $z_0 = 0$ est le coefficient de $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z}$ dans le développement de f en série de Laurent, il est donc égale à :

$$\text{Res}(f ; 0) = -\frac{1}{6}.$$

ii) Le développement de Taylor de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots \quad (\forall z \in \mathbb{C}, \text{ avec } |z| < 1).$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \dots \quad (\forall z \in \mathbb{C}, \text{ avec } |z| < 1).$$

En divisant finalement sur z^3 , il vient que :

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z}}_{\text{Partie principale}} + \underbrace{4 + 5z + \dots}_{\text{Partie analytique}} \quad (\forall z \in \mathbb{C}^*, \text{ avec } |z| < 1),$$

ce qui est le développement de f en série de Laurent autour du point singulier $z_0 = 0$.

— On constate que la partie principale de ce développement comporte un nombre fini de termes, ceci entraîne que $z_0 = 0$ constitue un pôle de f . Ce pôle est d'ordre 3 (c'est-à-dire que c'est un pôle triple) car la plus petite puissance de $z - z_0 = z$ qui apparaît dans le développement de f en série de Laurent est -3 .

Enfin, le résidu de f en $z_0 = 0$ est le coefficient de $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z}$ dans le développement de f en série de Laurent. Il est donc égale à :

$$\boxed{\text{Res}(f ; 0) = 3}.$$

iii) Les développements de Taylor des fonctions exponentielle et sinus au voisinage de 0 sont :

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

En substituant dans le premier développement z par $(-3z^2)$ et dans le second z par $3z$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{-3z^2} &= 1 + (-3z^2) + \frac{(-3z^2)^2}{2!} + \frac{(-3z^2)^3}{3!} + \frac{(-3z^2)^4}{4!} + \dots \\ \sin 3z &= 3z - \frac{(3z)^3}{3!} + \frac{(3z)^5}{5!} - \frac{(3z)^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

D'où :

$$e^{-3z^2} = 1 - 3z^2 + \frac{3^2}{2!}z^4 - \frac{3^3}{3!}z^6 + \frac{3^4}{4!}z^8 - \dots \quad (5)$$

$$z \sin 3z = 3z^2 - \frac{3^3}{3!}z^4 + \frac{3^5}{5!}z^6 - \frac{3^7}{7!}z^8 + \dots \quad (6)$$

En additionnant (5) et (6), on obtient :

$$\begin{aligned} e^{-3z^2} + z \sin 3z &= 1 + \left(\frac{3^2}{2!} - \frac{3^3}{3!}\right)z^4 - \left(\frac{3^3}{3!} - \frac{3^5}{5!}\right)z^6 + \left(\frac{3^4}{4!} - \frac{3^7}{7!}\right)z^8 - \dots \\ &= 1 - \left(\frac{3^3}{3!} - \frac{3^5}{5!}\right)z^6 + \left(\frac{3^4}{4!} - \frac{3^7}{7!}\right)z^8 - \dots \quad \left(\text{puisque } \frac{3^2}{2!} - \frac{3^3}{3!} = 0\right). \end{aligned}$$

En retranchant 1 et en divisant sur z^6 , on obtient finalement :

$$\boxed{f(z) = -\left(\frac{3^3}{3!} - \frac{3^5}{5!}\right) + \left(\frac{3^4}{4!} - \frac{3^7}{7!}\right)z^2 - \dots},$$

ce qui est le développement en série de Laurent de f autour du point singulier $z_0 = 0$.

— On constate que la partie principale de ce développement est nulle, ce qui entraîne que $z_0 = 0$ constitue une fausse singularité de f et on a par conséquent :

$$\boxed{\text{Res}(f ; 0) = 0}.$$

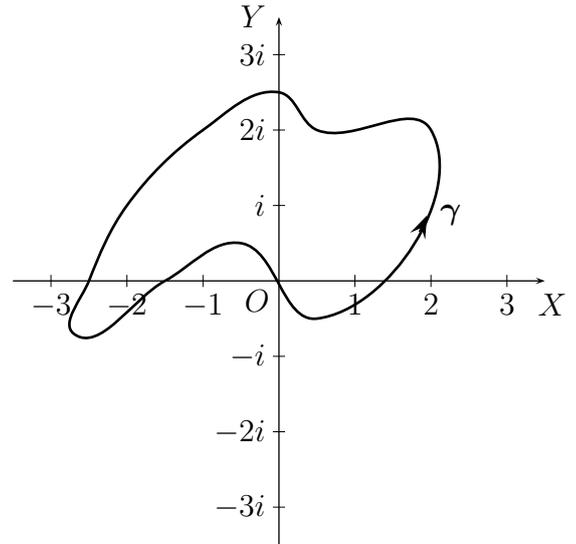
Exercice 4 (6 points) :

Soit f la fonction complexe à variable complexe, définie par :

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)^2(z^2+4)}.$$

1. Déterminer les singularités de f tout en précisant la nature de chacune d'entre elles.
2. Calculer les résidus de f en chacune de ses singularités.

3. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale curviligne $\oint_{\gamma} f(z) dz$, où γ est la courbe ci-contre.



4. Soit R un nombre réel strictement positif et différent de 2. On note par C_R le cercle de centre O et de rayon R , orienté positivement.

Montrer, en distinguant les cas, que l'on a :

$$\oint_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Solution :

1. Les points singuliers de f sont les points où f n'est pas définie ; ce sont donc les nombres complexes z tels que : $(z + 2)^2(z^2 + 4) = 0$. On a :

$$(z + 2)^2(z^2 + 4) = 0 \iff \begin{cases} (z + 2)^2 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z + 2 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 = -4 = (2i)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2 \\ \text{ou} \\ z = \pm 2i \end{cases}.$$

Les points singuliers de f sont donc : $z_0 = -2$, $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$.

— Déterminons maintenant la nature de chacun de ces points singuliers.

Nature du point singulier $z_0 = -2$: On a :

$$\lim_{z \rightarrow -2} f(z)(z + 2)^2 = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{z}{z^2 + 4} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Ceci montre que $z_0 = -2$ est un pôle d'ordre 2 (c'est-à-dire un pôle double) de f .

Nature du point singulier $z_1 = 2i$: Nous allons d'abord factoriser $(z^2 + 4)$ en produit de facteurs de premier degré. On a :

$$z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z + 2i)(z - 2i).$$

D'où :

$$f(z) = \frac{z}{(z + 2)^2(z + 2i)(z - 2i)} \tag{7}$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{z \rightarrow 2i} f(z)(z - 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z + 2)^2(z + 2i)} = \frac{2i}{(2i + 2)^2 4i} = \frac{1}{2(2i + 2)^2} \neq 0.$$

Ce qui montre que $z_1 = 2i$ est un pôle d'ordre 1 (c'est-à-dire un pôle simple) de f .

Nature du point singulier $z_2 = -2i$: En utilisant (7), on a :

$$\lim_{z \rightarrow -2i} f(z)(z+2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z}{(z+2)^2(z-2i)} = \frac{-2i}{(-2i+2)^2(-4i)} = \frac{1}{2(-2i+2)^2} \neq 0.$$

Ce qui montre que $z_2 = -2i$ est un *pôle d'ordre 1* (c'est-à-dire un *pôle simple*) de f .

2. Calculons les résidus de f en chacun de ses points singuliers, qui sont tous des pôles.

Calcul de $\text{Res}(f; -2)$: Comme $z_0 = -2$ est un pôle double de f , on a :

$$\text{Res}(f; -2) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} (f(z)(z+2)^2) = \lim_{z \rightarrow -2} \left(\frac{z}{z^2+4} \right)' = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1(z^2+4) - 2z(z)}{(z^2+4)^2} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{4-z^2}{(z^2+4)^2} = 0,$$

soit

$$\boxed{\text{Res}(f; -2) = 0}.$$

Calcul de $\text{Res}(f; 2i)$: Comme $z_1 = 2i$ est un pôle simple de f , on a (en utilisant (7)) :

$$\text{Res}(f; 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} f(z)(z-2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z+2)^2(z+2i)} = \frac{2i}{(2i+2)^2 4i} = \frac{1}{2(2i+2)^2} = \frac{1}{16i} = -\frac{1}{16}i,$$

soit

$$\boxed{\text{Res}(f; 2i) = -\frac{1}{16}i}.$$

Calcul de $\text{Res}(f; -2i)$: Comme $z_2 = -2i$ est un pôle simple de f , on a (en utilisant (7)) :

$$\text{Res}(f; -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} f(z)(z+2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z}{(z+2)^2(z-2i)} = \frac{-2i}{(-2i+2)^2(-4i)} = \frac{1}{2(-2i+2)^2} = \frac{1}{-16i} = \frac{1}{16}i,$$

soit

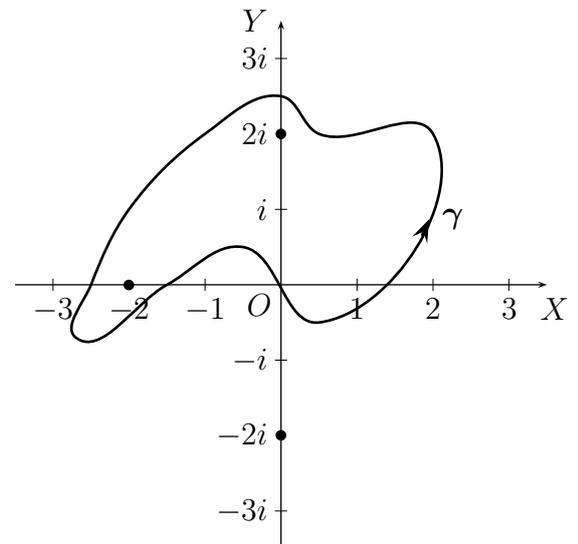
$$\boxed{\text{Res}(f; -2i) = \frac{1}{16}i}.$$

3. Le chemin γ est bien fermé et orienté positivement et la fonction f est rationnelle donc holomorphe sur \mathbb{C} sauf en ses points singuliers, qui sont $z_0 = -2$, $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$. En particulier, f est continue sur γ et holomorphe à l'intérieur de γ , sauf aux points : $z_0 = -2$ et $z_1 = 2i$ (remarquer que le point $z_2 = -2i$ est à l'extérieur de γ). On a donc, d'après le théorème des résidus :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; -2) + \text{Res}(f; 2i)) = 2\pi i \left(0 - \frac{1}{16}i \right) = \frac{\pi}{8},$$

soit

$$\boxed{\oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{8}}.$$

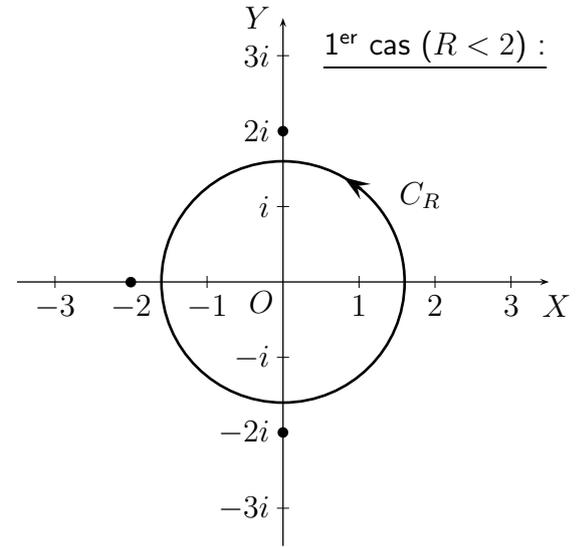


4. La valeur de l'intégrale $\oint_{C_R} f(z) dz$ dépend de la position des points singuliers de f par rapport au cercle C_R (à savoir si ces points sont à l'intérieur ou à l'extérieur de C_R). Comme ces points singuliers sont tous de module égal à 2, nous sommes amenés à distinguer les deux cas suivants :

1^{er} cas (si $R < 2$) :

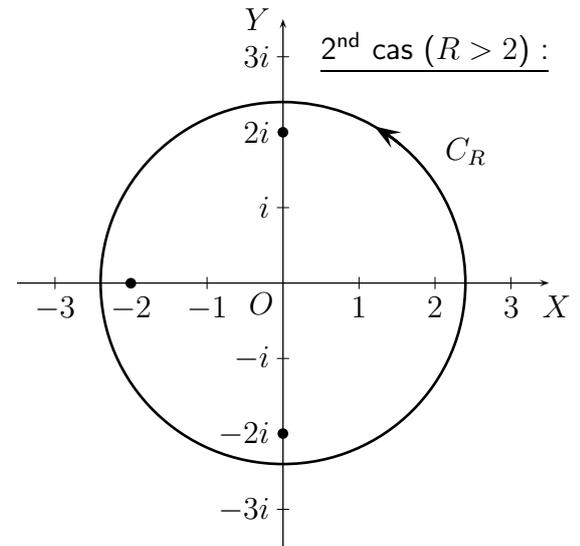
Dans ce cas, les points singuliers de f se trouvent tous à l'extérieur de C_R . La fonction f est donc holomorphe à l'intérieur de C_R (et continue sur C_R) et d'après le théorème intégrale de Cauchy, on a :

$$\oint_{C_R} f(z) dz = 0.$$

**2nd cas (si $R > 2$) :**

Dans ce cas, les points singuliers de f se trouvent tous à l'intérieur de C_R . On a donc, d'après le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} \oint_{C_R} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}(f; -2) + \text{Res}(f; 2i) + \text{Res}(f; -2i)) \\ &= 2\pi i \left(0 - \frac{1}{16}i + \frac{1}{16}i \right) = 0. \end{aligned}$$



En conclusion, on a dans tous les cas :

$$\boxed{\oint_{C_R} f(z) dz = 0},$$

comme il fallait le prouver.

FIN