**Université A. Mira de Béjaia**
**Faculté de la Technologie**
**Département ST2**

**Examen de Maths 5**
**Année universitaire 2012-2013**

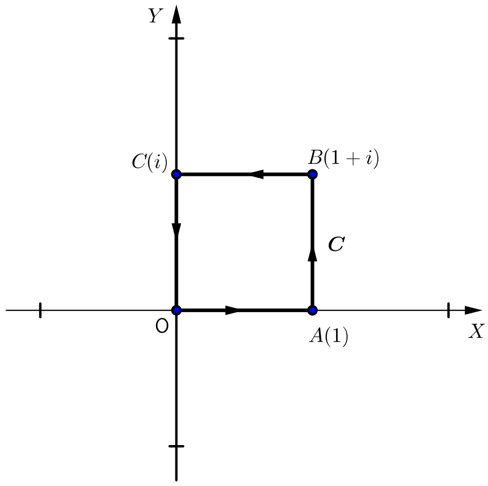
**29/05/2013**

**Exercice 1 (3 points) :**

En utilisant des paramétrisations, calculer l'intégrale curviligne :

$$\oint_C (z + \overline{z})\, dz\,,$$

où $C$ est le carré $(OABC)$, orienté positivement (voir la figure ci-contre).




**Exercice 2 (5 points) :**

Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = \mathrm{u}(x, y) + i\,\mathrm{v}(x, y),$$

où $z = x + i\,y$, $\mathrm{u} = \mathrm{Re} f$ et $\mathrm{v} = \mathrm{Im} f$.
On donne :

$$\mathrm{v}(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + y + 4.$$

1. Déterminer $\mathrm{u}(x, y)$ sachant que $f(1 - i) = 2$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de $z$.

**Exercice 3 (6 points) :**

Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions complexes suivantes autour du point singulier indiqué puis préciser la nature du point singulier en question ainsi que le résidu en ce point.

$$\text{i)} \quad f(z) = z^2 e^{i/z}\,, \qquad z_0 = 0;$$

$$\text{ii)} \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)^2}\,, \qquad z_0 = 0;$$

$$\text{iii)} \quad f(z) = \frac{e^{-2z^2} - \cos 2z}{z^4}\,, \quad z_0 = 0.$$

**Exercice 4 (6 points) :**

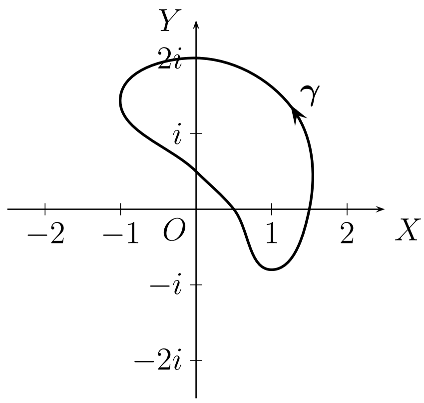
Soit $f$ la fonction complexe à variable complexe, définie par :

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}.$$

1. Déterminer les singularités de $f$ tout en précisant la nature de chacune d'entre elles.
2. Calculer les résidus de $f$ en chacune de ses singularités.

**Tournez la page svp**

3. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale curviligne $\oint_\gamma f(z)\,dz$, où $\gamma$ est la courbe ci-contre.




4. Soit $R$ un nombre réel strictement positif et différent de 1. On note par $C_R$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$, orienté positivement.
   Montrer, en distinguant les cas, que l'on a :

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

**Bonne chance**

**Université A. Mira de Béjaia**

**Faculté de la Technologie**

**Département ST2**

**29 mai 2013**

# Solution détaillée de l'Examen de Maths 5 (année 2012 - 2013)

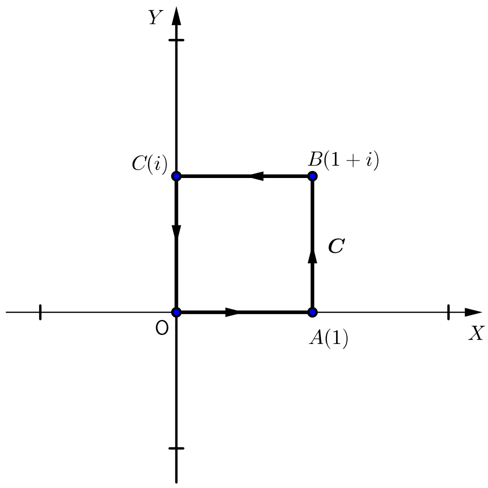
B. FARHI

**Exercice 1 (3 points) :**

En utilisant des paramétrisations, calculer l'intégrale curviligne :

$$\oint_C (z+\overline{z})\, dz\,,$$

où $C$ est le carré $(OABC)$, orienté positivement (voir la figure ci-contre).




**Solution :** L'intégrale $\oint_C (z+\overline{z})\, dz$ se décompose en :

$$\oint_C (z+\overline{z})\, dz = \int_{OA} (z+\overline{z})\, dz + \int_{AB} (z+\overline{z})\, dz + \int_{BC} (z+\overline{z})\, dz + \int_{CO} (z+\overline{z})\, dz \qquad (I)$$

Nous allons, dans ce qui suit, calculer les valeurs de chacune des 4 intégrales du membre droit de l'égalité $(I)$ en utilisant des paramétrisations.

<u>Calcul de $\int_{OA} (z+\overline{z})\, dz$ :</u>

Sur $OA$, on a $z = t$, avec $t \in [0,1]$. D'où $z+\overline{z} = 2t$ et $dz = dt$. L'intégrale $\int_{OA} (z+\overline{z})\, dz$ se transforme en :

$$\int_{OA} (z+\overline{z})\, dz = \int_0^1 2t\, dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1\,;$$

soit

$$\int_{OA} (z+\overline{z})\, dz = 1 \qquad (a)$$

<u>Calcul de $\int_{AB} (z+\overline{z})\, dz$ :</u>

Sur $AB$, on a $z = 1+it$, avec $t \in [0,1]$. D'où $z+\overline{z} = 2$ et $dz = i\,dt$. L'intégrale $\int_{AB} (z+\overline{z})\, dz$ se transforme donc en :

$$\int_{AB} (z+\overline{z})\, dz = \int_0^1 2i\, dt = [2it]_0^1 = 2i\,;$$

soit

$$\int_{AB} (z + \overline{z})\, dz \;=\; 2i \tag{b}$$

<u>Calcul de $\int_{BC}(z+\overline{z})\,dz$ :</u>

Sur $BC$, on a $z = t + i$, avec $t \in [1,0]$. D'où $z+\overline{z} = 2t$ et $dz = dt$. L'intégrale $\int_{BC}(z+\overline{z})\,dz$ se transforme donc en :

$$\int_{BC} (z+\overline{z})\, dz = \int_1^0 2t\,dt = \left[t^2\right]_1^0 = -1\,;$$

soit

$$\int_{BC} (z + \overline{z})\, dz \;=\; -1 \tag{c}$$

<u>Calcul de $\int_{CO}(z+\overline{z})\,dz$ :</u>

Sur $CO$, on a $z = it$, avec $t \in [1,0]$. D'où $z+\overline{z} = 0$ et $dz = i\,dt$. L'intégrale $\int_{CO}(z+\overline{z})\,dz$ se transforme donc en :

$$\int_{CO} (z+\overline{z})\, dz = \int_1^0 0\,dt = 0\,;$$

soit

$$\int_{CO} (z + \overline{z})\, dz \;=\; 0 \tag{d}$$

En reportant les résultats de $(a)$, $(b)$, $(c)$ et $(d)$ dans $(I)$, on obtient finalement :

$$\boxed{\oint_C (z+\overline{z})\, dz \;=\; 2i}\,.$$

**Exercice 2 (5 points) :**

Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = \mathrm{u}(x,y) + i\,\mathrm{v}(x,y),$$

où $z = x + i\,y$, $\mathrm{u} = \mathrm{Re} f$ et $\mathrm{v} = \mathrm{Im} f$.
On donne :

$$\mathrm{v}(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + y + 4.$$

1. Déterminer $\mathrm{u}(x,y)$ sachant que $f(1-i) = 2$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de $z$.

**Solution :**

**1.** La fonction $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si les fonctions réelles u et v satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, qui sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} &=& \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} &=& -\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} \end{cases} \tag{$\star$}$$

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y - 1$ et $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(x,y) = -2y + 2x + 1$. On a donc (en vertu de $(\star)$) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(x,y) &=& -2y + 2x + 1 & \ldots\ldots(1) \\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(x,y) &=& -2x - 2y + 1 & \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

En intégrant (1) par rapport à $x$, on a :

$$\mathrm{u}(x,y) = \int (-2y+2x+1)\,dx\ ,$$

soit

$$\mathrm{u}(x,y) = -2xy + x^2 + x + c(y)\ , \tag{3}$$

où $c(y)$ est une fonction de $y$. En reportant (3) dans (2), on obtient :

$$-2x + c'(y) = -2x - 2y + 1\ ,$$

d'où :

$$c'(y) = -2y+1.$$

Par suite :

$$c(y) = \int (-2y+1)\,dy\ ,$$

soit

$$c(y) = -y^2 + y + k \qquad \text{(avec } k \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Et en reportant ceci dans (3), on obtient :

$$\mathrm{u}(x,y) = -2xy + x^2 + x - y^2 + y + k\ ,$$

soit (en réordonnant) :

$$\mathrm{u}(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + x + y + k \tag{4}$$

Il reste maintenant à déterminer la valeur de $k$ en se servant de la condition $f(1-i) = 2$. On a :

$$\begin{aligned} f(1-i) = 2 \Longleftrightarrow \mathrm{u}(1,-1) + i\,\mathrm{v}(1,-1) = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{u}(1,-1) = 2 \\ \mathrm{v}(1,-1) = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1^2 - (-1)^2 - 2(1)(-1) + 1 - 1 + k = 2 \\ 1^2 - (-1)^2 + 2(1)(-1) - 1 - 1 + 4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

D'où $k = 0$. En reportant cette valeur de $k$ dans (4), on obtient finalement :

$$\boxed{\mathrm{u}(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + x + y}\,.$$

**2.** On a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathrm{u}(x,y) + i\,\mathrm{v}(x,y) \\ &= \left(x^2 - y^2 - 2xy + x + y\right) + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - x + y + 4\right) \\ &= \underbrace{\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)}_{=z^2} + \underbrace{\left(-2xy + i(x^2 - y^2)\right)}_{=iz^2} + \underbrace{\left(x + iy\right)}_{=z} + \underbrace{\left(y - ix\right)}_{=-iz} + 4i \\ &= z^2 + iz^2 + z - iz + 4i \\ &= (1+i)z^2 + (1-i)z + 4i. \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f(z) = (1+i)z^2 + (1-i)z + 4i}\,.$$

**Exercice 3 (6 points) :**

Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions complexes suivantes autour du point singulier indiqué puis préciser la nature du point singulier en question ainsi que le résidu en ce point.

$$\text{i)} \quad f(z) = z^2 e^{i/z}, \qquad z_0 = 0;$$

$$\text{ii)} \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)^2}, \qquad z_0 = 0;$$

$$\text{iii)} \quad f(z) = \frac{e^{-2z^2} - \cos 2z}{z^4}, \quad z_0 = 0.$$

**Solution :**

i) Le développement de Taylor de la fonction exponentielle au voisinage de 0 s'écrit :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

En substituant dans ce développement $z$ par $i/z$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{i/z} &= 1 + \frac{i}{z} + \frac{(i/z)^2}{2!} + \frac{(i/z)^3}{3!} + \frac{(i/z)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{i}{z} - \frac{1}{2!z^2} - \frac{i}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \cdots \qquad (\forall z \in \mathbb{C}^*). \end{aligned}$$

En multipliant finalement par $z^2$, il vient que :

$$\boxed{f(z) = \underbrace{z^2 + iz - \frac{1}{2}}_{\text{Partie analytique}} \underbrace{- \frac{i}{6z} + \frac{1}{24z^2} + \cdots}_{\text{Partie principale}} \qquad (\forall z \in \mathbb{C}^*)},$$

ce qui est le développement de $f$ en série de Laurent autour du point singulier $z_0 = 0$.

— On constate que la partie principale de ce développement comporte une infinité de termes, ce qui montre que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de $f$.

Enfin, le résidu de $f$ en $z_0 = 0$ est le coefficient de $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z}$ dans le développement de $f$ en série de Laurent, il est donc égale à :

$$\boxed{\mathrm{Res}(f\,;\,0) = -\frac{1}{6}i}.$$

ii) Le développement de Taylor de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \qquad (\forall z \in \mathbb{C}, \text{ avec } |z| < 1).$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots \qquad (\forall z \in \mathbb{C}, \text{ avec } |z| < 1).$$

En divisant finalement sur $z^2$, il vient que :

$$\boxed{f(z) = \underbrace{\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}}_{\text{Partie principale}} + \underbrace{3 + 4z + \ldots}_{\text{Partie analytique}} \qquad (\forall z \in \mathbb{C}^*, \text{ avec } |z| < 1)},$$

ce qui est le développement de $f$ en série de Laurent autour du point singulier $z_0 = 0$.

— On constate que la partie principale de ce développement comporte un nombre fini de termes, ceci entraîne que $z_0 = 0$ constitue un pôle de $f$. Ce pôle est d'ordre 2 (c'est-à-dire que c'est un pôle double) car la plus petite puissance de $z - z_0 = z$ qui apparaît dans le développement de $f$ en série de Laurent est $-2$.

Enfin, le résidu de $f$ en $z_0 = 0$ est le coefficient de $(z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z}$ dans le développement de $f$ en série de Laurent. Il est donc égale à :

$$\boxed{\operatorname{Res}(f\,;\,0) = 2}.$$

**iii)** Les développements de Taylor des fonctions exponentielle et cosinus au voisinage de 0 sont :

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots \end{aligned}$$

En substituant dans le premier développement $z$ par $-2z^2$ et dans le second $z$ par $2z$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{-2z^2} &= 1 + (-2z^2) + \frac{(-2z^2)^2}{2!} + \frac{(-2z^2)^3}{3!} + \frac{(-2z^2)^4}{4!} + \cdots \\ \cos 2z &= 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \frac{(2z)^8}{8!} - \cdots \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$e^{-2z^2} = 1 - 2z^2 + \frac{2^2}{2!}z^4 - \frac{2^3}{3!}z^6 + \frac{2^4}{4!}z^8 - \cdots \tag{5}$$

$$\cos 2z = 1 - \frac{2^2}{2!}z^2 + \frac{2^4}{4!}z^4 - \frac{2^6}{6!}z^6 + \frac{2^8}{8!}z^8 - \cdots \tag{6}$$

En soustrayant (6) de (5), on obtient :

$$e^{-2z^2} - \cos 2z = \left(\frac{2^2}{2!} - \frac{2^4}{4!}\right)z^4 - \left(\frac{2^3}{3!} - \frac{2^6}{6!}\right)z^6 + \left(\frac{2^4}{4!} - \frac{2^8}{8!}\right)z^8 - \cdots$$

En divisant finalement sur $z^4$, il vient que :

$$\boxed{f(z) = \left(\frac{2^2}{2!} - \frac{2^4}{4!}\right) - \left(\frac{2^3}{3!} - \frac{2^6}{6!}\right)z^2 + \left(\frac{2^4}{4!} - \frac{2^8}{8!}\right)z^4 - \cdots},$$

ce qui est le développement en série de Laurent de $f$ autour du point singulier $z_0 = 0$.

— On constate que la partie principale de ce développement est nulle, ce qui entraîne que $z_0 = 0$ constitue une fausse singularité de $f$ et on a par conséquent :

$$\boxed{\operatorname{Res}(f\,;\,0) = 0}.$$

**Exercice 4 (6 points) :**

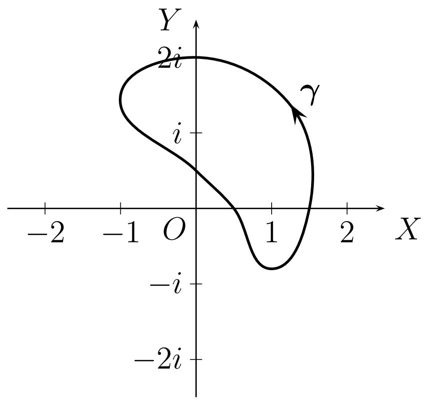
Soit $f$ la fonction complexe à variable complexe, définie par :

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}.$$

1. Déterminer les singularités de $f$ tout en précisant la nature de chacune d'entre elles.

2. Calculer les résidus de $f$ en chacune de ses singularités.

3. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale curviligne $\oint_\gamma f(z)\,dz$, où $\gamma$ est la courbe ci-contre.




4. Soit $R$ un nombre réel strictement positif et différent de 1. On note par $C_R$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$, orienté positivement.
Montrer, en distinguant les cas, que l'on a :

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

**Solution :**

1. Les points singuliers de $f$ sont les points où $f$ n'est pas définie ; ce sont donc les nombres complexes $z$ tels que : $(z-1)^2(z^2+1)=0$. On a :

$$(z-1)^2\left(z^2+1\right)=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(z-1)^2=0\\ \text{ou}\\ z^2+1=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z-1=0\\ \text{ou}\\ z^2=-1=i^2\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z=1\\ \text{ou}\\ z=\pm i\end{array}\right. .$$

Les points singuliers de $f$ sont donc : $z_0=1$, $z_1=i$ et $z_2=-i$.
— Déterminons maintenant la nature de chacun de ces points singuliers.
Nature du point singulier $z_0=1$ : On a :

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-1)^2 = \lim_{z\to 1}\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\neq 0.$$

Ceci montre que $z_0=1$ est *un pôle d'ordre* 2 (c'est-à-dire *un pôle double*) de $f$.
Nature du point singulier $z_1=i$ : Nous allons d'abord factoriser $(z^2+1)$ en produit de facteurs de premier degré. On a :

$$z^2+1 = z^2-i^2=(z+i)(z-i).$$

D'où :

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+i)(z-i)} \tag{7}$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \lim_{z\to i}\frac{z}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{i}{(i-1)^2 2i} = \frac{1}{2(i-1)^2}\neq 0.$$

Ce qui montre que $z_1=i$ est *un pôle d'ordre* 1 (c'est-à-dire *un pôle simple*) de $f$.
Nature du point singulier $z_2=-i$ : En utilisant (7), on a :

$$\lim_{z\to -i} f(z)(z+i) = \lim_{z\to -i}\frac{z}{(z-1)^2(z-i)} = \frac{-i}{(-i-1)^2(-2i)} = \frac{1}{2(-i-1)^2}\neq 0.$$

Ce qui montre que $z_2=-i$ est *un pôle d'ordre* 1 (c'est-à-dire *un pôle simple*) de $f$.

**2.** Calculons les résidus de $f$ en chacun de ses points singuliers, qui sont tous des pôles.

<u>Calcul de $\mathrm{Res}(f\,;\,1)$ :</u> Comme $z_0 = 1$ est un pôle double de $f$, on a :

$$\mathrm{Res}(f\,;\,1) \;=\; \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(f(z)(z-1)^2\right) \;=\; \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{z^2+1}\right)' \;=\; \lim_{z\to 1}\frac{1(z^2+1)-2z(z)}{\left(z^2+1\right)^2} \;=\; 0\,,$$

soit

$$\boxed{\mathrm{Res}(f\,;\,1) \;=\; 0}\,.$$

<u>Calcul de $\mathrm{Res}(f\,;\,i)$ :</u> Comme $z_1 = i$ est un pôle simple de $f$, on a (en utilisant (7)) :

$$\mathrm{Res}(f\,;\,i) \;=\; \lim_{z\to i} f(z)(z-i) \;=\; \lim_{z\to i}\frac{z}{(z-1)^2(z+i)} \;=\; \frac{i}{(i-1)^2 2i} \;=\; \frac{1}{2(i-1)^2} \;=\; \frac{1}{-4i} \;=\; \frac{1}{4}i\,,$$

soit

$$\boxed{\mathrm{Res}(f\,;\,i) \;=\; \frac{1}{4}i}\,.$$

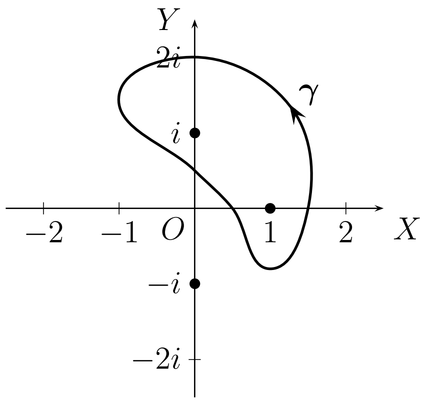
<u>Calcul de $\mathrm{Res}(f\,;\,-i)$ :</u> Comme $z_2 = -i$ est un pôle simple de $f$, on a (en utilisant (7)) :

$$\mathrm{Res}(f\,;\,-i) \;=\; \lim_{z\to -i} f(z)(z+i) \;=\; \lim_{z\to -i}\frac{z}{(z-1)^2(z-i)} \;=\; \frac{-i}{(-i-1)^2(-2i)} \;=\; \frac{1}{2(-i-1)^2} \;=\; \frac{1}{4i} \;=\; -\frac{1}{4}i\,,$$

soit

$$\boxed{\mathrm{Res}(f\,;\,-i) \;=\; -\frac{1}{4}i}\,.$$

**3.** Le chemin $\boldsymbol{\gamma}$ est bien <u>fermé</u> et <u>orienté positivement</u> et la fonction $f$ est rationnelle donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en ses points singuliers, qui sont $z_0 = 1$, $z_1 = i$ et $z_2 = -i$. En particulier, $f$ est <u>continue</u> sur $\boldsymbol{\gamma}$ et <u>holomorphe</u> à l'intérieur de $\boldsymbol{\gamma}$, sauf aux points : $z_0 = 1$ et $z_1 = i$ (remarquer que le point $z_2 = -i$ est à l'extérieur de $\boldsymbol{\gamma}$). On a donc, d'après <u>le théorème des résidus</u> :

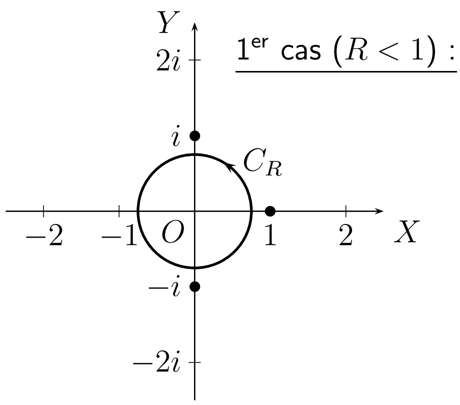



$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f\,;\,1)+\mathrm{Res}(f\,;\,i)\right) \;=\; 2\pi i\left(0+\frac{1}{4}i\right) \;=\; -\frac{\pi}{2},$$

soit

$$\boxed{\oint_{\boldsymbol{\gamma}} f(z)\,dz \;=\; -\frac{\pi}{2}}\,.$$

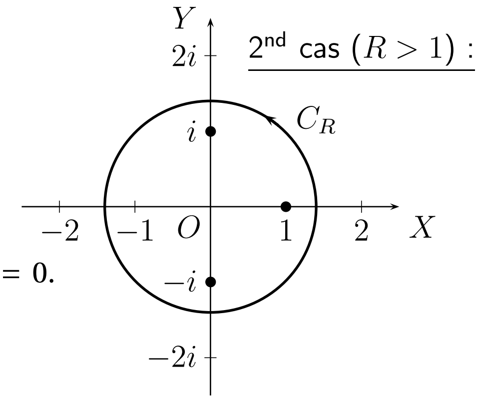
**4.** La valeur de l'intégrale $\oint_{C_R} f(z)\,dz$ dépend de la position des points singuliers de $f$ par rapport au cercle $C_R$ (à savoir si ces points sont à l'intérieur ou à l'extérieur de $C_R$). Comme ces points singuliers sont tous de module égale à 1, nous sommes amenés à distinguer les deux cas suivants :




<u>**1er cas (si $R < 1$) :**</u>

Dans ce cas, les points singuliers de $f$ se trouvent tous <u>à l'extérieur</u> de $C_R$. La fonction $f$ est donc <u>holomorphe</u> à l'intérieur de $C_R$ (et continue sur $C_R$) et d'après <u>le théorème intégrale de Cauchy</u>, on a :

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz \;=\; 0.$$




**2$^{\text{nd}}$ cas (si $R > 1$) :**

Dans ce cas, les points singuliers de $f$ se trouvent tous à l'intérieur de $C_R$.
On a donc, d'après le théorème des résidus :

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f\,;\,1)+\mathrm{Res}(f\,;\,i)+\mathrm{Res}(f\,;\,-i)\right) \;=\; 2\pi i\left(0+\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}i\right) \;=\; 0.$$

En conclusion, on a dans tous les cas :

$$\boxed{\oint_{C_R} f(z)\,dz \;=\; 0},$$

comme il fallait le prouver.

FIN