جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2

30 janvier 2014

Examen de Maths3

Exercice 1 :(06pts)
Étudier la nature des séries numériques suivantes :

$$(i) \sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}}{n!} \qquad (ii) \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$$

$$(iii) \sum_{n\geq 2} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}-1} \qquad (iv) \sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1}{n\sqrt{n}}$$

Exercice 2 :(08pts)
Partie 1 :
On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions f_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette suite converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers une fonction f que l'on déterminera.
3. Cette suite est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$? (justifier).

Partie 2 :
Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ dont le terme général est donné par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

1. Étudier la nature de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction somme S, définie sur $\mathbb{R}$ par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$, est continue.
3. Montrer que S est de classe $C^1(\mathbb{R})$. (indication : effectuer l'étude sur tout intervalle $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$)
4. En déduire l'expression de $S'(x)$.

Exercice 3 :(06pts)
Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{(n+1)}$$

Etudier la série entière précédente en $x = R$ et $x = -R$ (si $R \neq +\infty$) et en déduire le domaine de convergence.

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2

30 janvier 2014

Examen de Maths3

Exercice 1 :(06pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes :

01 pt $(i) \sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}}{n!}$ $(ii) \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ 01,50 pts

01 pt $(iii) \sum_{n\geq 2} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}-1}$ $(iv) \sum_{n\geq 2} \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1}{n\sqrt{n}}$ 02,50 pts

Solution :

1. On pose $U_n = \frac{e^{n^2}}{n!} \geq 0, \quad \forall n \geq 0$. Utilisons le critère de d'Alembert. Estimons, donc, le rapport entre deux termes successifs.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2} e^{(2n+1)} \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!} e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n+1}}{n+1} = +\infty > 1$$

Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{n^2}}{n!}$ diverge.

Exercice 2 :(08pts)

Partie 1 :

On considère la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions f_n sur $\mathbb{R}$.

Solution :

01 pt

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$.

Passons à la dérivée,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-2nxe^{-nx^2}}{(n+1)^3}.$$

Trouvons les points pour lesquels la dérivée s'annule,

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2nxe^{-nx^2}}{(n+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainsi, $f_n'(x) < 0$ ssi $x \geq 0$, de même, $f_n'(x) \geq 0$ ssi $x < 0$. On en déduit, alors, que f_n est croissante si $x \in]-\infty, 0[$ et décroissante si $x \in]0, +\infty[$.

Elle atteint,ainsi, son maximum pour $x = 0$ et pour cette valeur la fonction donne $f_n(0) = \frac{1}{(n+1)^3}$.

En résumé, on obtient le tableau des variations suivant,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{(n+1)^3}$	$\searrow$	0

2. Montrer que cette suite converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers une fonction f que l'on déterminera.

01 pt

Solution :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonctions $f : x \mapsto f(x) = 0$.

3. Cette suite est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$? (justifier).

Solution :

Il s'agit de calculer $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|$ et de comparer le résultat avec 0.

01 pt

Par définition, $\|f_n - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} - 0 \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$.

Or, d'après le tableau de variations, $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} = \frac{1}{(n+1)^3}$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, sur $\mathbb{R}$, vers la fonction f.

Partie 2 :

Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ dont le terme général est donné par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

1. Étudier la nature de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

Etudions la série $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$, sachant que, $\|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$.

Au regard du tableau des variations, il est clair que,

02 pt

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Ainsi, $\|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{(n+1)^3}$. Par ailleurs, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^3}$ est une série convergente par comparaison à une série de Riemann.

On en déduit que la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente, par conséquent elle converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que la fonction somme S, définie sur $\mathbb{R}$ par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$, est continue.

0.5 pt

Solution :

Les fonctions f_n sont continue sur $\mathbb{R}$ et converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors, en vertu du théorème de continuité des séries de fonctions, la somme $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que S est de classe $C^1(\mathbb{R})$. (indication : effectuer l'étude sur tout intervalle $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$)

Solution :

(a) Les fonctions f_n sont de Classe $C^1(\mathbb{R})$.

(b) La série converge simplement, alors la fonction somme est bien définie. (il existe au moins $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ est convergente)

(c) Suivant l'indication, considèrons un intervalle du type $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ $(a > 0)$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-a, a]$. On a

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{-2nx\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3}\right| = \frac{2n|x|\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leq \frac{2na}{(n+1)^3}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{2na}{(n+1)^3}$ est convergente par comparaison à une série de Riemann convergente. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-a, a]$.

De (a), (b) et (c) on conclut que la somme S est de classe $C^1([-a, a])$, et par suite S est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

4. En déduire l'expression de $S'(x)$.

Solution :

0,5 pt

$$S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{-2nx\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3}.$$

Exercice 3 :(06pts)

03pts

Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière suivante :

01pt

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{(n+1)}$$

Etudier la série entière précédente en $x = R$ et $x = -R$ (si $R \neq +\infty$) et en déduire le domaine de convergence.

01pt 01pt

$N^o 1$ (10)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1}{n\sqrt{n}} \quad \text{nature :}$$

22 JAN 2013

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = 1 + x + x\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

ou bien on peut écrire :

$$e^x = 1 + x + o(x).$$

0,5

On pose $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on a

$$e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1}{n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\,\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$\varepsilon \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

0,5

La nature de $\sum \frac{e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1}{n\sqrt{n}}$ dépend de la nature des séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\,\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ CV (car elle CV ABS ou bien d'après le critère de Leibniz) 0,5

Comme $\lim_{n \to +\infty} E\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 0$, à partir d'un certain rang $\left| E\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \right| < 1$ 0,5

ce qui conduit à écrire

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} E\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \right| \le \frac{1}{n^2} \quad \text{(à partir d'un certain rang)}$$

d'où comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (règle de Riemann) $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^2} E\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \right| \xrightarrow{\text{CVA} \Rightarrow \text{CV}} \sum \frac{(-1)^n}{n^2} E\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ CV

d'où $\sum \frac{E\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - 1}{n\sqrt{n}}$ est convergente 0,5

Exo3 (06 pts)

18 AVR 2013

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n x^n}{(n+1)}, \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$$

01

$I =]-1, 1[$ Intervalle de conv.

Calculons la somme : $S(x)$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n, \text{ où } x \in]-1, 1[.$$

On a $\forall x \in]-1, 1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \quad (*)$$

En intégrant $(*)$ de 0 à x, on obtient

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) - x. \quad (**)$$

En divisant les deux membres de $(**)$ par x

$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{-\ln(1-x)}{x} - 1.$$

En dérivant cette formule ; on obtient :

$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n+1} = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

En multipliant par x, on a : $\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, x^{n}}{n+1} = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Comme $S(0) = 0$, on a

$$\forall x \in]-1,1[: S(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \in]-1,0[\cup]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$