Université A Mira Bejaia
Faculté de technologie
Département de ST 2$^{\text{ème}}$ Année

Année universitaire 2013/2014

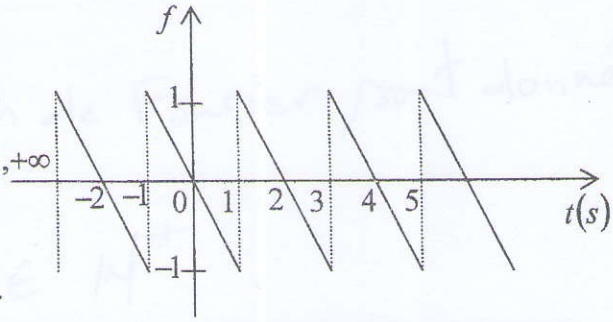
Examen de PHY.03

Durée : 2Heures

Ex 01: Séries de Fourier (4pts)

Soit la fonction périodique $f(t)$ représentée ci-contre.

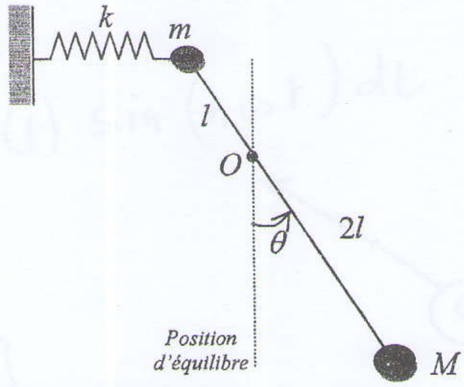
1. Montrer que les coefficients b_n de Fourier sont donnés par : $b_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^n$, $n = 1,2,3,...,+\infty$
2. Déduire le développement en séries de Fourier de f.
3. Représenter le spectre de Fourier de la fonction.



Ex 02: Système Libre Non Amorti (5pts)

Une tige de longueur $3l$ porte à ses extrémités les masses M et m. La tige peut tourner autour du point O. A l'équilibre le ressort n'est pas déformé et la tige de masse négligeable est verticale (voir la figure ci-contre). Dans le cadre de l'approximation des mouvements de faibles amplitudes $(\theta << 1)$:

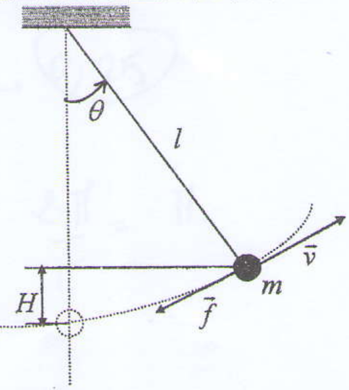
I. Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U du système pour la coordonnée généralisée θ.
II. Trouver l'équation différentielle du mouvement et déduire la condition d'oscillation.
III. Trouver la période propre T_0.



Ex 03: Système Amorti (7pts)

La figure ci-contre schématise un pendule simple composé d'une boule de masse m et d'une tige sans masse et de longueur l. La masse est amortie par une force de frottement $\vec{f}$ de la forme $-\alpha\vec{v}$.

1. Calculer l'énergie potentielle U du système. Vérifier que la position $\theta = 0$ est stable.
2. Calculer le lagrangien L du système pour $\theta << 1$.
3. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
4. Quelle est la condition pour que la masse ait un mouvement d'oscillation.
5. Trouver le régime du mouvement si $\alpha = 0.1m\sqrt{g/l}$.
6. De combien est divisée l'amplitude du mouvement après 20 oscillations complètes.
7. Calculer la pulsation propre ω_0, la constante d'amortissement λ, la pseudo pulsation ω, le décrément logarithmique δ et le facteur de qualité Q.



On donne : $g = 10\,m.s^{-2}$, $l = 40\,cm$.

Questions de cours: Système Forcé (4pts)

L'équation différentielle d'un pendule élastique (masse + ressort) amorti par une force visqueuse de coefficient α et excité par une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω est donnée par :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

(a) Donner les expressions de l'amplitude réelle A ainsi que la phase ϕ du mouvement. (b) Pour quelle pulsation l'amplitude est maximale et trouver l'amplitude correspondante. (c) Donner la condition pour qu'il y ait résonnance.

Bon courage

Solution de l'examen de Physique III

2013/2014

Exo N° 1. Séries de Fourier (4 pts)

1/ Montrer que les coefficients b_n de Fourier sont donnés par :

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

par définition :
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

0,25

$$f(t) = -t \quad \text{pour } t \in [-1, 1]$$

0,25

$$T = 2\,s$$

0,25

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}(-t)\sin(n\omega t)\,dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

$$b_n = -\int_{-1}^{1} t\sin(n\omega t)\,dt$$

intégration par partie :

0,25

$$\int \underbrace{t}_{f}\,\underbrace{\sin(n\pi t)}_{g'}\,dt = t\left(-\frac{\cos n\pi t}{\pi n}\right) + \frac{1}{\pi n}\int \cos n\pi t\,dt$$

$$= f \cdot g - \int f' \cdot g.$$

$$\int t \sin(n\pi t)\,dt = -\frac{2\cos(n\pi t)}{n\pi} + \frac{1}{(\pi n)^2}\sin(n\pi t) + C$$

$$\int_{-1}^{1} t \sin(n\pi t)\,dt = -\frac{2\cos(n\pi t)}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t) \ldots$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi \longleftarrow 0{,}5$$

$$b_n = -\int_{-1}^{1} t \sin(n\pi t)\,dt = \frac{2}{n\pi}\cos n\pi$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots +\infty$, $\cos n\pi = (-1)^n$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^n \longleftarrow 0{,}25$$

2/ Développement en Séries de Fourier : 0,5

La fonction $f(t)$ est impaire, alors : $\underbrace{a_0 = a_n = 0}$

La Serie $S(t)$ s'écrit donc :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega t \quad 0{,}25$$

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n} (-1)^n \sin(n\pi t)$$

0,5

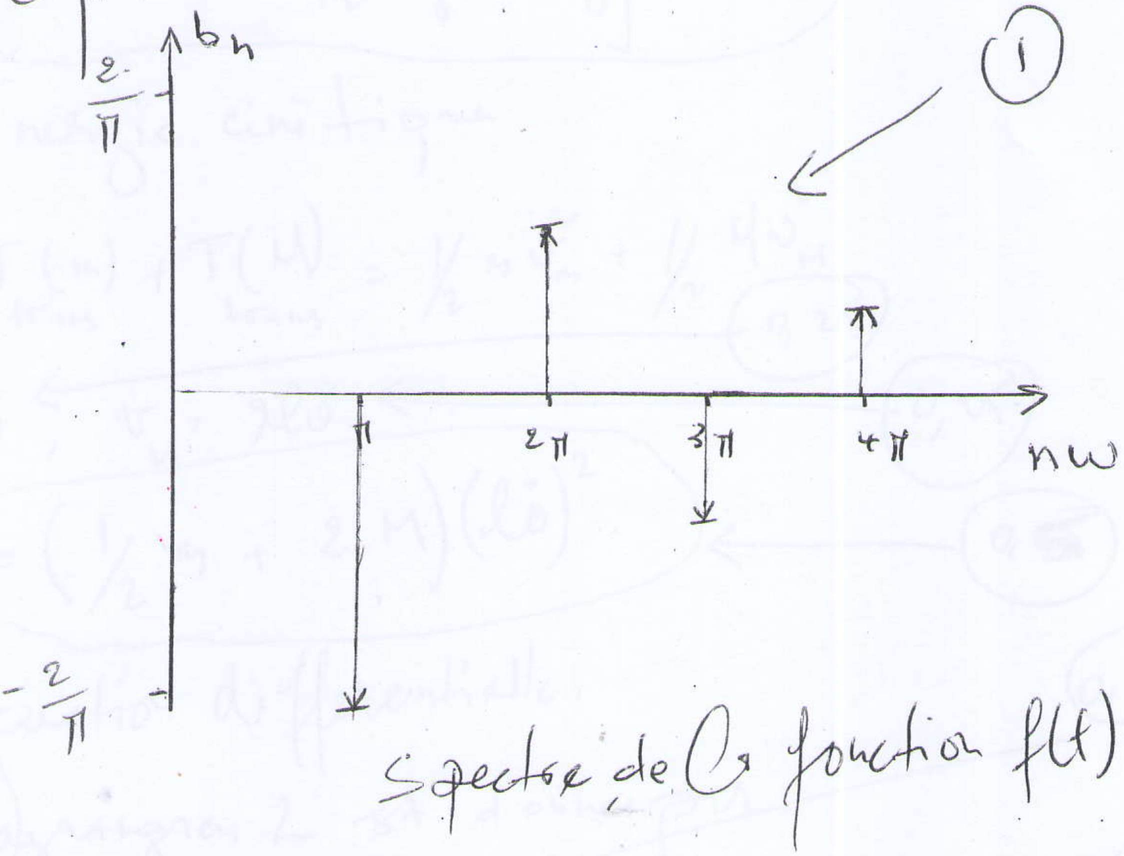
$$= -\frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi t - \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi t + \cdots + \frac{2}{k\pi}(-1)^k \sin k\pi t$$

3/ Le Spectre de Fourier:

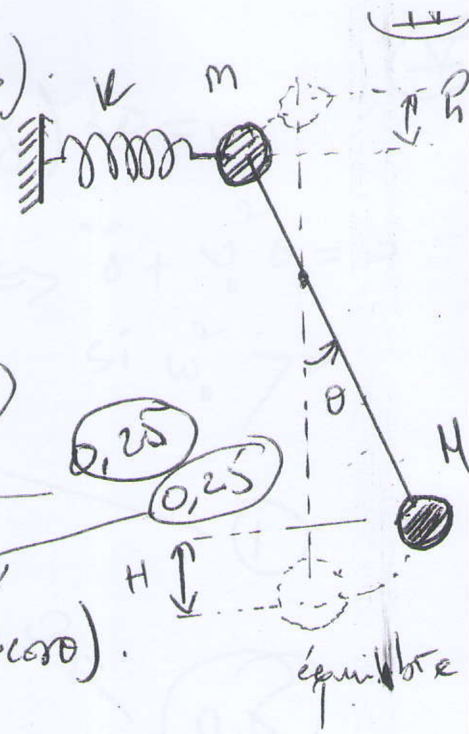
Les impulsions b_n peuvent être représentées par le graphe ci-dessous.

1



Spectre de la fonction f(t)

2. Système libre non amorti : (5pts)



1/ L'énergie potentielle

a/

$$U = U_{\text{élast}}(\text{ressort}) + U_{\text{gravit}}(m) + U_{\text{gravit}}(M) \quad (0{,}25)$$

$$\simeq \tfrac{1}{2}K(l\theta)^2 - mgh + MgH$$

(0,25) (0,25)

$$= \tfrac{1}{2}K(l\theta)^2 - mg(l - l\cos\theta) + Mg(2l - 2l\cos\theta)$$

$$\theta \ll 1, \quad \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$U \simeq \left[\tfrac{1}{2}(Kl) - \tfrac{1}{2}mg + Mg\right] l\theta^2 \quad (0{,}25)$$

b/ L'énergie cinétique

$$T = T_{\text{trans}}(m) + T_{\text{trans}}(M) = \tfrac{1}{2}m v_m^2 + \tfrac{1}{2}M v_M^2 \quad (0{,}25)$$

$$v_m = l\dot\theta, \quad v_M = 2l\dot\theta \quad (0{,}25)$$

$$\Rightarrow T = \left(\tfrac{1}{2}m + 2M\right)(l\dot\theta)^2 \quad (0{,}5)$$

2/ Équation différentielle.

(0,25) (0,25)

Le Lagrangien L est donné par :

$$L = T - U = \left(\tfrac{1}{2}m + 2M\right)(l\dot\theta)^2 - \left(\tfrac{1}{2}Kl - \tfrac{1}{2}mg + Mg\right)l\theta^2$$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

V

$\Rightarrow (m+4M)l^2\ddot{\theta} + (Kl - mg + 2Mg)\,l\theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Kl - mg + 2Mg}{(m+4M)l}\,\theta = 0} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$

si $\omega_0^2 > 0$

(1)

* Condition d'oscillation :

Le système oscille si $\begin{cases} \omega_0 > 0 \\ \text{ou} \\ \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \end{cases}$

(0,5)

$\Rightarrow \boxed{Kl > mg - 2Mg}$ ou $\boxed{m - 2M < \dfrac{Kl}{g}}$

(0,5)

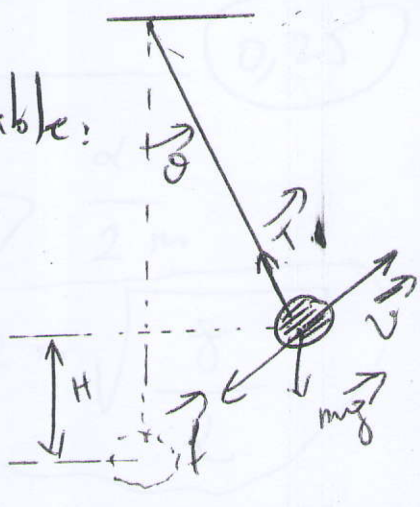
3/ La période T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{(m+4M)l}{Kl - mg + 2Mg}}$$

(0,5)

Exo N° 3 système ~~amorti~~ forcé (7 pts) :

1/ Energie potentielle et position d'équi^{re} stable :



$U = mgH = mgl(1-\cos\theta)$. (0,5)

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgl\cos\theta$.

- position d'équilibre θ_0 est dite stable si :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} > 0 \quad , \quad \text{pour } \theta = \theta_0 = 0$$

0,25

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=0} = mgl > 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ est une position stable}$$

0,25

2/ Le Lagrangien L pour $\theta \ll 1$, $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

$$T = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2$$

0,5

$$U = mgl(1 - \cos\theta) \simeq mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$L = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

0,5

3/ L'équation de Lagrange pour les systèmes amortis :

0,25

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \quad , \quad D = \frac{1}{2}\alpha v_m^2 = \frac{1}{2}\alpha (l\dot{\theta})^2$$

0,25

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0} \iff \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

1

4/ Condition d'oscillation pour les systèmes amortis :

0,25

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

le système oscille si : $\omega_0 > \lambda \iff \sqrt{\frac{g}{l}} > \frac{\alpha}{2m}$

0,25

$$\Rightarrow \boxed{\alpha < 2m\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

(XII

(0,5)

5/ Nature du mvt par $\alpha = 0{,}1 m\sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

$\alpha = 0{,}1 m\sqrt{\frac{g}{\ell}} < 2m\sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow$ Le mvt est pseudopériodique

(0,5) ⟶ (faiblement amorti).

6/ A l'instant t_1, l'amplitude du mvt est $A e^{-\lambda t_1}$

A " " $(t_1 + 20T)$, " " est $A e^{-\lambda(t_1+20T)}$

Après 20 oscillations complètes, l'amplitude est

divisée par $e^{20\lambda T} = e^{2\pi}$ (0,25)

(0,25) (0,25)

7/ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}4}} = 5 \text{ rad.s}^{-1}$ (0,25)

$\lambda = \frac{\alpha}{2m} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 0{,}5 \text{ s}^{-1}$ (0,25)

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 4{,}97 \text{ rad.s}^{-1}$ (0,25)

$\delta = \lambda T = 2\pi\frac{\lambda}{\omega} = 0{,}63$ (0,25)

$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = 5.$ (0,25)

...stions de cours : Système forcé (4 pts)

a/ L'amplitude réelle

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$ 0,75

La phase ϕ :

$$\tan\phi = \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ 0,75

b/

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$ 0,75

L'amplitude maximale :

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

c/ Condition de résonnance : 0,75

pour qu'il y ait résonnance, il faut que,

$$\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \Rightarrow \omega_0 > \sqrt{2} \times \lambda$$ 1

ou

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$