جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaia

Université A/MIRA de Béjaia	Année universitaire 2013-2014
Faculté : Technologie	Examen de Rattrapage : Maths 3
Département : ST2	Durée : 2 heures 04/09/2014.

Exercice 1 :(6 pts)
Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \cos\frac{\pi n+1}{n}$ 2) $\sum_{n>1} \frac{e^{-n^2}}{n-1}$

3) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n-e^{-n}}$ 4) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2-(-1)^n}$

Exercice 2 :(8 pts)
Soit la série de fonctions, $\sum_{n\geq 0} f_n$, dont le terme général est donnée par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

1. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la convergence simple, convergence normale, uniforme de cette série .

Considérons la fonction, s, définie par :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

2. la fonction s est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? (justifier).

Exercice 3 :(6 pts)
Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)(n+2)} x^n$.

(b) $\sum_{n\geq 0} (2n+1)x^n$.

1. Conv simple sur 2 pts   Solution GA02   I

• Étudier, sur $\mathbb{R}$, la convergence simple de la série de fonctions $\sum \frac{x}{n(1+nx^2)}$

Cas particulier, pour $x=0$ on obtient $\sum 0$ CV 0,5

si $x \neq 0$, on a

$$\sum \frac{x}{n(1+nx^2)} = x \sum \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

$$\frac{1}{1+nx^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{nx^2}$$, par conséquent

$$\frac{1}{n(1+nx^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

la série $\sum \frac{1}{n^2x^2}$ CV pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, par équivalence $\sum \frac{1}{n(1+nx^2)}$ CV pour tout $x \in \mathbb{R}_*$

En résumé 1,5

la série de fonction en question est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

• Étudier, sur $\mathbb{R}$, la convergence normale de $\sum f_n(x)$

Calculons $\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$.

$$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$ 0,5

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{n}}$		$\sqrt{\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\searrow$	$\frac{-1}{n\sqrt{n}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

0,5

• $\lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{n^2x^2} = 0$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

$$f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-1}{2n\sqrt{n}}$$

Il est clair que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$ 0,5

Comme $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV, par définition de la convergence normale la série de fonction 0,5 $\sum_n f_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

- la convergence uniforme

$$\text{CV N sur } \mathbb{R} \Longrightarrow \text{CV unif sur } \mathbb{R}.$$ 1

2.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

S est-elle dérivable ?

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_*^+$

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n \in C^1([a,b])$

(b) il existe $x_0 \in [a,b]$; $\sum f_n(x_0)$ CV (question 1°)

(c) la série de fonction $\sum f_n'$ CV unif sur $[a,b]$ en effet :

$$\sum f_n'(x) = \sum \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

Il est clair que :

$$\left|\frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}\right| \leq \frac{1+nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

$$\leq \frac{1}{n^2x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\leq \frac{1}{a^2n^2}$$

Comme $\sum \frac{1}{a^2n^2}$ est convergente, la série de fonction $\sum_n f_n'(x)$ est normalement convergente ~~dans~~ $[a,b]$

$\Longrightarrow \sum f_n'(x)$ unif CV dans $[a,b]$

de (a), (b) et (c) la fonction S est dérivable sur $[a,b]$. Comme $[a,b]$ est quelconque dans $\mathbb{R}_*^+$ alors S est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

II

$\forall x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

cette égalité peut s'écrire sous cette forme : 0,5

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x\,\varepsilon(x)} \quad (*)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ $(x\varepsilon(x) = o(x))$

bien sûr x est toujours dans $]-1,1[$.

si on pose $x = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\left(\in]-1,1[\ \forall n \geq 2\right)$

dans le terme v_n, en utilisant $*$, devient

$$v_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right)$$

c-à-d

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{(-1)^n}{n^3}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \quad 0,25$$

Étudier la série $\sum v_n$, revient tout simplement à l'étude des séries $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ et

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^3}\varepsilon\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

ou bien

$$\sum o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

$\sum \frac{1}{n}$ div 0,5

$\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ cv (car elle cv absolument) (ou Liebniz) 0,5

$\sum o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ cv 0,5

car $\left|o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{n^3}$

en résumé la série en question est divergente 0,25

I

Corrigé de l'examen de Rattrapage

Solution de l'ex 01

Exo1 (sur 06 points).

nature de $\sum_{n>0} \cos \frac{\pi n+1}{n}$

On pose $U_n = \cos \frac{\pi n+1}{n}$

On a : $\lim_{n\to+\infty} U_n = -1 \neq 0 \xrightarrow{CNC}$

la série $\sum U_n$ div

sur 1 point

nature de $\sum_{n>1} \frac{e^{-n^2}}{n-1}$.

On pose $U_n = \frac{e^{-n^2}}{n-1}$.

d'abord, $U_n > 0, \forall n > 1$, 0,25

donc l'application du critère d'Alembert st autorisée, en effet !

$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1 \Longrightarrow \sum U_n$ CV

1 PL

nature de $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n-e^{-n}}$

On pose $v_n = \frac{1}{n-e^{-n}}$

Comme $v_n > 0$ $(n \geq 1)$, la série en question st alternée,

l'application du critère de leibniz st autorisée.

En effet !

$\lim_{n\to} v_n = 0$ et

$v_n \searrow$ ($\operatorname{car} n - e^{-n} \nearrow$), les conditions du critère de leibniz sont vérifiées alors $\sum (-1)^n v_n$ CV.

1,25

nature de $\sum_{n\geq0} \frac{n}{n^2-(-1)^n}$.

On pose :

$v_n = \frac{n}{n^2-(-1)^n}$.

La quantité v_n peut s'écrire sous cette forme :

$v_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{n^2}}$,

$\forall n > 0$.

par ailleurs,

Exo 3

III

• Rayon de conv.

(a) : $R = 1 \longrightarrow$ (1,5)

(b) : $R = 1 \longrightarrow$ (1,5)

• calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)(n+2)} x^n .$$

On a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ; |x| < 1} \longrightarrow (0,5)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \longrightarrow (*)$$

en dérivant *

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

en Multipliant par x

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

En Integrant de 0 à x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n+1}}{(n+1)} = \int_0^x \frac{-t}{(1+t)^2} dt$$

$$= f(x)$$

en intégrant une 2ème fois de 0 à x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \int_0^x f(t) dt$$

ce qui revient à écrire :

$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt}$$

(1)

$$S(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt ; x \neq 0 \text{ et } |x| < 1 \end{cases}$$

où

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{-t}{(1+t)^2} dt$$

$$= \int_0^x \frac{-t - 1 + 1}{(1+t)^2} dt$$

$$= -\int_0^x \frac{1}{1+t} dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

d'où la Fve !

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} + 1$$

$$S(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{-\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2(1+x)} + \dfrac{1}{x^2} \\ \text{si } x \neq 0 \text{ et } |x| < 1 \end{cases}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, x^n$$

on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \longrightarrow 1$$

en dérivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en multipliant par $2x$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^n = \frac{2x}{(1-x)^2}$$

d'où la

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} 2n x^n = \frac{2x}{(1-x)^2}} \quad 2$$

$$1 + 2 \longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= S(x)$$

Λ | Γ