

Université A/MIRA de Béjaïa
Faculté : Technologie
Département : ST2

Année universitaire 2013-2014
Examen de Rattrapage : Maths 3
Durée : 2 heures
04/09/2014.

Exercice 1 :(6 pts)

Étudier la nature des séries suivantes :

$$1) \sum_{n \geq 1} \cos \frac{\pi n + 1}{n}$$

$$2) \sum_{n > 1} \frac{e^{-n^2}}{n - 1}$$

$$3) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n - e^{-n}}$$

$$4) \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^2 - (-1)^n}$$

Exercice 2 :(8 pts)

Soit la série de fonctions, $\sum_{n \geq 0} f_n$, dont le terme général est donnée par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}.$$

1. Étudier, sur \mathbb{R} , la convergence simple, convergence normale, uniforme de cette série .

Considérons la fonction, s , définie par :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}.$$

2. la fonction s est-elle dérivable sur \mathbb{R} ? (justifier).

Exercice 3 :(6 pts)

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$(a) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)(n+2)} x^n.$$

$$(b) \sum_{n \geq 0} (2n+1)x^n.$$

1.

Conv simple
sur 2 pts

Solution
 $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}_2$

\mathbb{F}

• Etudier, sur \mathbb{R} , la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+x^n)}$

Cas particulier; pour $x=0$

on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} n$ CV

si $n \rightarrow \infty$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(1+n)} = \infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} \text{ CV}$$

$$\frac{1}{1+n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}, \text{ par conséquent}$$

$$\frac{1}{n(1+n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CV pour

tout $x \in \mathbb{R}_*$, pour

équivalence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)}$ CV

pour tout $x \in \mathbb{R}_*$

En résumé

111

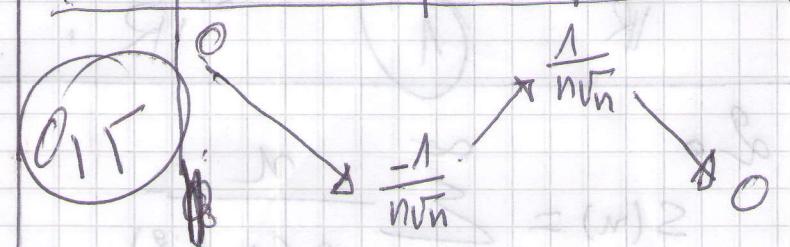
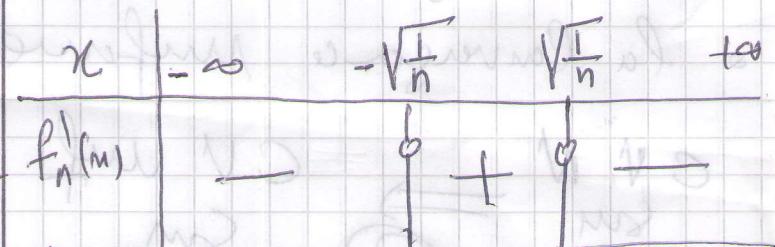
la série de fonctions en question est suplement convergente sur \mathbb{R} .

• Etudier, sur \mathbb{R} , la convergence normale de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Calculons $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$.

$x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 x^2} = 0$$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

$$f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n\sqrt{n}}$$

Il est clair que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

MOIR

Comme $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CV

par définition de la convergence normale.

la série de fonctions

$\sum f_n(x)$ est normalement convergente sur \mathbb{R} .

• la convergence uniforme. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente

$$\begin{array}{ccc} \text{CVN} & \xrightarrow{\quad} & \text{CV uniforme} \\ \text{sur} & & \text{sur} \\ \mathbb{R} & \textcircled{1} & \mathbb{R} \end{array}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

S est-elle dérivable ?

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_*$

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n \in C^1([a, b])$

(b) il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $\sum f_n(x_0)$ CV (question)

(c) la série de fonctions

$\sum f_n$ CV uniforme sur \mathbb{R} en effet:

$$\sum f_n(x) = \sum \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

Il est clair que !

$$\left| \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2} \right| \leq \frac{1+nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

$$\leq \frac{1}{n^2 x^2}$$

$$\leq \frac{1}{a^2 n^2}$$

la série de fonctions

$\sum f_n(x)$ est normalement

convergente dans $[a, b]$

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ uniforme CV
dans $[a, b]$

de (a), (b) et (c) la

fonction S est dérivable

sur $[a, b]$. Comme $[a, b]$

est quelconque dans \mathbb{R}_*

alors S est dérivable sur \mathbb{R}_*

II

Etudier la suite $\{b_n\}$

$$\frac{1}{1-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^n.$$

cette égalité peut

s'écrire sous cette
forme !

015

$$\frac{1}{1-n} = 1 + n + \alpha \varepsilon(n)$$

avec $\lim \varepsilon(n) = 0$

$$n \rightarrow \infty (\alpha \varepsilon(n) = o(n))$$

ben sait n est toujours
dans $\mathbb{J}-1, 1\mathbb{E}$.

$$\text{sit on pose } n = \frac{(-1)^n}{n^2} (\in \mathbb{J}-1, 1\mathbb{E})$$

$\forall n \geq 2$

dans le terme V_n , en utilisant,
devient

$$V_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \right)$$

C'est à dire

$$V_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{(-1)^n}{n^3} o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \quad 012B$$

Étudier la suite $\{b_n\}$,
en tout supplément
à l'étude des séries

$$\sum \frac{1}{n},$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^3} \text{ et}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^3} o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

ou bien

$$\sum o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{div} \quad 01P$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^3} \text{ evi (cor elle)} \\ \text{cv absolument (on liebni)} \quad 01P$$

$$\sum o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \text{ cv} \quad 01P$$

$$\text{cor } \left| o\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

en résumé

la série en question
est divergente

012B

I

Corrigé

L'exercice & Rattrapage

Solution
de
l'ex 01

Exo 1 (sur 06 points)

nature de $\sum \cos \frac{\pi n+1}{n}$

On pose $u_n = \cos \frac{\pi n+1}{n}$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1 \neq 0$ CNC

la série $\sum u_n$ div sur 1 point

nature de $\sum \frac{e^{n^2}}{n-i}$

On pose $u_n = \frac{e^{n^2}}{n-i}$.

d'abord, $u_n > 0$, $u_n \geq 1$, Q2T.
Donc l'application du critère d'Abel est autorisée, en effet!

La $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1 \Rightarrow$ UCU
1 PL

nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n-e^n}$

On pose $v_n = \frac{1}{n-e^n}$

Comme $v_n > 0$ ($n \geq 1$), la série en question est alternée,

l'application du critère de Leibniz est autorisée.
En effet!

La $v_n = 0$ et
 $n \rightarrow$

$v_n \downarrow (\cos n - e^{-n})$, les conditions du critère

de Leibniz sont vérifiées
alors $\sum (-1)^n v_n$ CV.

1,2 T

nature de $\sum \frac{n}{n^2 - (-1)^n}$.

On pose :

$$v_n = \frac{n}{n^2 - (-1)^n}$$

La quantité v_n peut s'écrire sous cette forme :

$$v_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

$$t_n > 0.$$

Par ailleurs,

Exo 3

Résumé de Conv.

(a) : $R = 1 \rightarrow \text{Diverge}$

(b) : $R = 1 \rightarrow \text{Converge}$

Calculons la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)(n+2)} x^n$$

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; |x| < 1 \rightarrow \text{Diverge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (*)$$

En dérivant (*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

en multipliant par x

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n = \frac{-x}{(1+x)^3}$$

En intégrant de 0 à x :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n+1}}{(n+1)} = \int_0^x \frac{-t}{(1+t)^3} dt$$

$$= f(x)$$

En intégrant une 2^{ème} fois de 0 à x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \int_0^x f(t) dt$$

On peut revenir à écrire :

$t \in [-1, 0] \cup [0, 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$$

(1)

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

où

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{-t}{(1+t)^3} dt$$

$$= \int_0^x \frac{-t-1+1}{(1+t)^3} dt$$

$$= - \int_0^x \frac{1}{1+t} dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

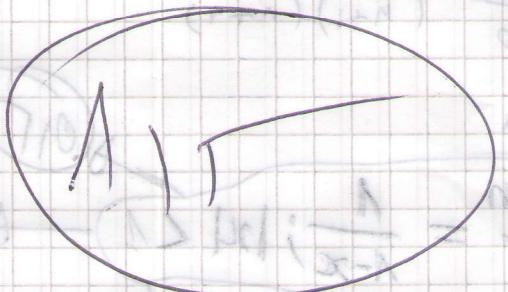
done the Tue:

$$\int_0^x f(t) dt = -\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} + 1$$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x=0 \\ -\ln(1+x) - \frac{1}{x^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \text{ and } |x| < 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} = \cancel{f}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = S(x)$$



(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$$

on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

divide by x

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

multiply by $2x$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^n = \frac{2x}{(1-x)^2}$$

on the

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2nx^n = \frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$x \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$x^5 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$x^6 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$

$$x^7 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$