

✠-Examen de Rattrapage-◇-Probabilités et Statistiques-✠

Exercice 1 (06.00 points) : On indique dans le tableau ci-dessous la distance entre l'université et le lieu de résidence (en Kilomètre) d'un groupe d'étudiants.

Distance	0	1	2	3	4	5	8
Effectif	5	21	24	n_4	20	13	2

1. Compléter le tableau ci-dessus sachant que la distance moyenne est égale à 2.75 Km.
2. Représenter graphiquement les effectifs cumulés décroissants.
3. Déterminer la médiane, l'écart type et l'intervalle interquartile ?
4. Maintenant, on s'intéresse uniquement aux étudiants qui n'habitent pas dans les environs immédiats de l'université (ceux qui habitent à au moins 1 Km). Parmi eux, Quel est le pourcentage des étudiants qui étudient à 5 Km ou plus de leur lieu de résidence ?

Exercice 2 (06.50 points) : Les observations ci-dessous représentent le nombre de sélections des footballeurs en équipe d'Algérie qui ont participé à la coupe d'Afrique 2012.

38 43 2 74 26 72 29 58 62 67 44 37 41 29 59 17 43 21 38 21 18

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre x de sélections	$0 \leq x < x_1$	$25 \leq x < x_2$	$30 \leq x < x_3$	$55 \leq x < 75$
Nombre de footballeurs	n_1	n_2	n_3	n_4

2. Représenter graphiquement la série et calculer le mode.
3. Calculer les fréquences cumulées croissantes et décroissantes et tracer leurs graphes.
4. Calculer la médiane et la variance.
5. Quel est le pourcentage des footballeurs qui ont été sélectionné au maximum 60 fois et au minimum 40 fois ?

Exercice 3 (07.50 points) : Le tableau ci-dessous représente l'évolution du prix du fioul domestique (en Centimes de Dinars par Hectolitre) allant de 2012 à 2013.

Année	2012				2013		
	1	2	3	4	1	2	3
Trimestre	1	2	3	4	5	6	7
Rang X du trimestre	1	2	3	4	5	6	7
Prix Y	2720	2990	3300	3760	3730	4060	4770

- I) Représenter le nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1,7}$. On pose $Z = \frac{Y}{100}$.
 1. Calculer \bar{Z} et $V(Z)$. Déduire \bar{Y} et $V(Y)$.
 2. Déterminer l'équation de la droite de régression de Z en X .
 3. Calculer le coefficient de corrélation. Conclure.
- II) On cherche maintenant à déterminer un ajustement de Z en fonction de X de la forme

$$Z = b a^X.$$

1. Déterminer la valeur de a et b .
2. Déduire l'équation de l'ajustement de Z en fonction de X .
3. Calculer le coefficient de corrélation. Conclure.
4. Estimer le prix du fioul pour le 4^{ème} trimestre de l'année 2013.
5. Lequel des deux ajustements est le plus judicieux.

Correction de l'examen de Rattrapage

Proba - Stat 2013 - 2014

Maths 4

Exo 1 (106,00 pts)

1) Compléter le tableau: on a $\bar{x} = 2,75$.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 n_i x_i = 2,75$$

$$N = \sum_{i=1}^7 n_i = 85 + n_4$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 n_i x_i = 2,75 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^7 n_i x_i = 2,75 N$$

$$\Rightarrow 230 + 3n_4 = 233,75 + 2,75 n_4$$

$$\Rightarrow 3,75 = 0,25 n_4$$

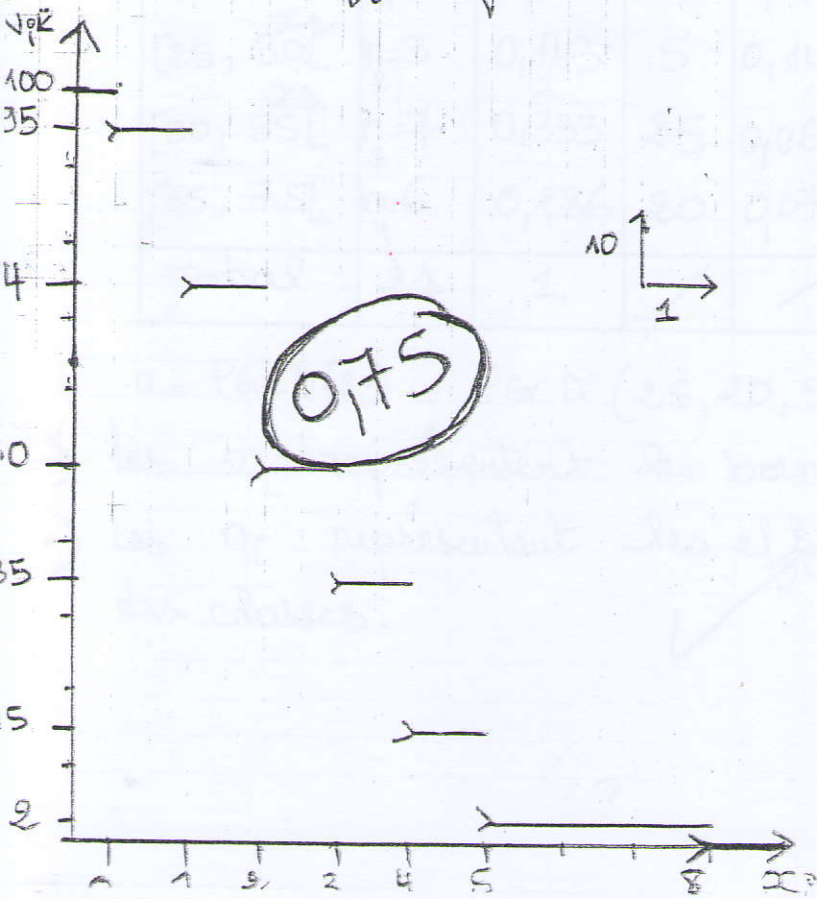
$$n_4 = \frac{3,75}{0,25} = 15$$

$n_4 = 15$

$$N = 85 + n_4 = 85 + 15 = 100 \Rightarrow N = 100$$

Distance x_i	n_i	f_i	N_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
0	5	0,05	100	0	0
1	21	0,21	95	21	21
2	24	0,24	74	48	96
3	15	0,15	50	45	135
4	20	0,20	35	80	320
5	13	0,13	15	65	325
8	2	0,02	2	16	128
Total	100=N	1	/	275	1025

2) Courbe des effectifs cumulée décroissants



3) Mediane

$$N = 100 = 2 \times p \Rightarrow p = \frac{N}{2}$$

$$\Rightarrow p = 50$$

N: pair.

$$M_e = \frac{x_p + x_{p+1}}{2} = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$$

$M_e = 2,5$

Erreur type:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 n_i x_i^2 - \bar{x}^2} = 2,6875$$

$$s = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2,6875} = 1,6393$$

Intervalle interquartile: $Q_3 - Q_1 = ?$

P2

$Q_1 = ?$

$F(Q_1) = 0,25$

$Q_1 = x_{0,25} = 1$

$\Rightarrow Q_1 = 1$

$Q_3 = ?$

$F(Q_3) = 0,75$

$Q_3 = x_{0,75} = 4$

$\Rightarrow Q_3 = 4$

$Q_3 - Q_1 = 4 - 1 = 3$

4) Les étudiants qui habitent à au moins 1 km sont au nombre de $100 - 5 - 21 = 74$ étudiants.

Parmi-eux, Les étudiants qui étudient à 5 km ou plus de leur lieu de résidence sont au nombre de

$n_6 + n_7 = 13 + 2 = 15$ étudiants.

1

soit le pourcentage égale à $\frac{15}{74} \times 100 = 20,27\%$

Exo 2: 06,50 pts

1) Compléter le tableau

2

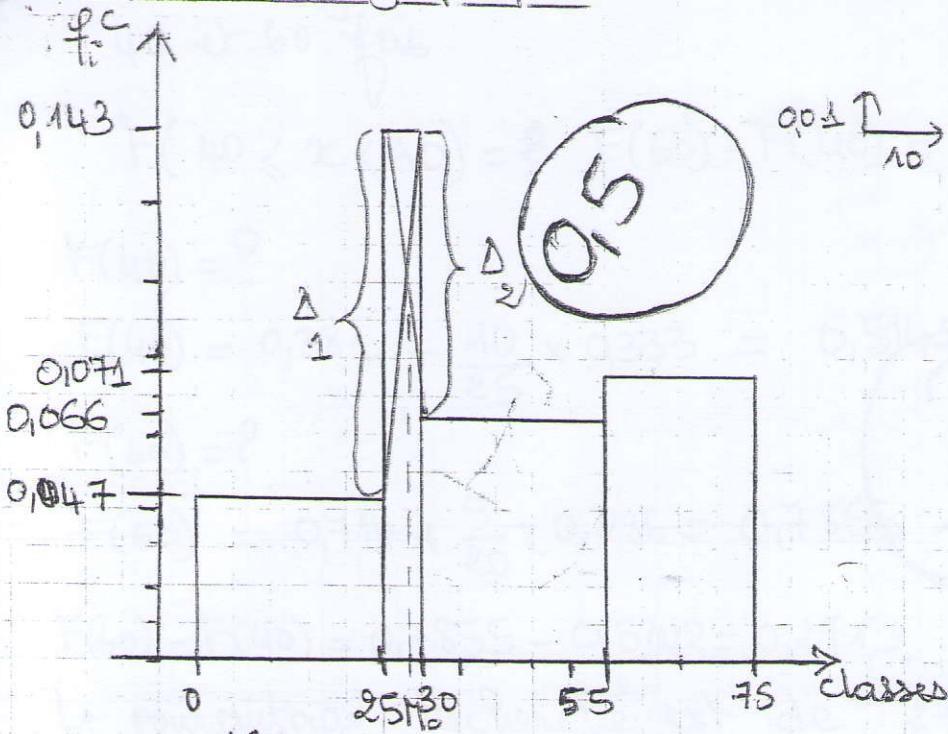
classes	n_i	$\frac{f_i}{b_i}$	a_i	$\frac{p_i}{b_i}$	F_i	F_{iV}	x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[0, 25[$	$n_1 = 5$	0,238	25	0,0476	0,238	1	12,5	62,5	781,25
$[25, 30[$	$n_2 = 3$	0,143	5	0,143	0,381	0,762	27,5	82,5	2268,75
$[30, 55[$	$n_3 = 7$	0,333	25	0,0666	0,714	0,619	42,5	297,5	12643,75
$[55, 75[$	$n_4 = 6$	0,286	20	0,0715	1	0,286	65	390	25350
Total	21	1	/	/	/	/	/	832,5	41043,75

$a = \text{PGCD}(a_i) = \text{PGCD}(25, 20, 5) = 5$

1) Les x_i représentent les bornes supérieures des classes.

2) Les n_i représentent les effectifs associés à chacune des classes.

représentation graphique :



Histogramme.

Mode: [P3]

La classe modale est [25,30[

$$\Delta_1 = 0,143 - 0,047 = 0,096$$

$$\Delta_2 = 0,143 - 0,066 = 0,077$$

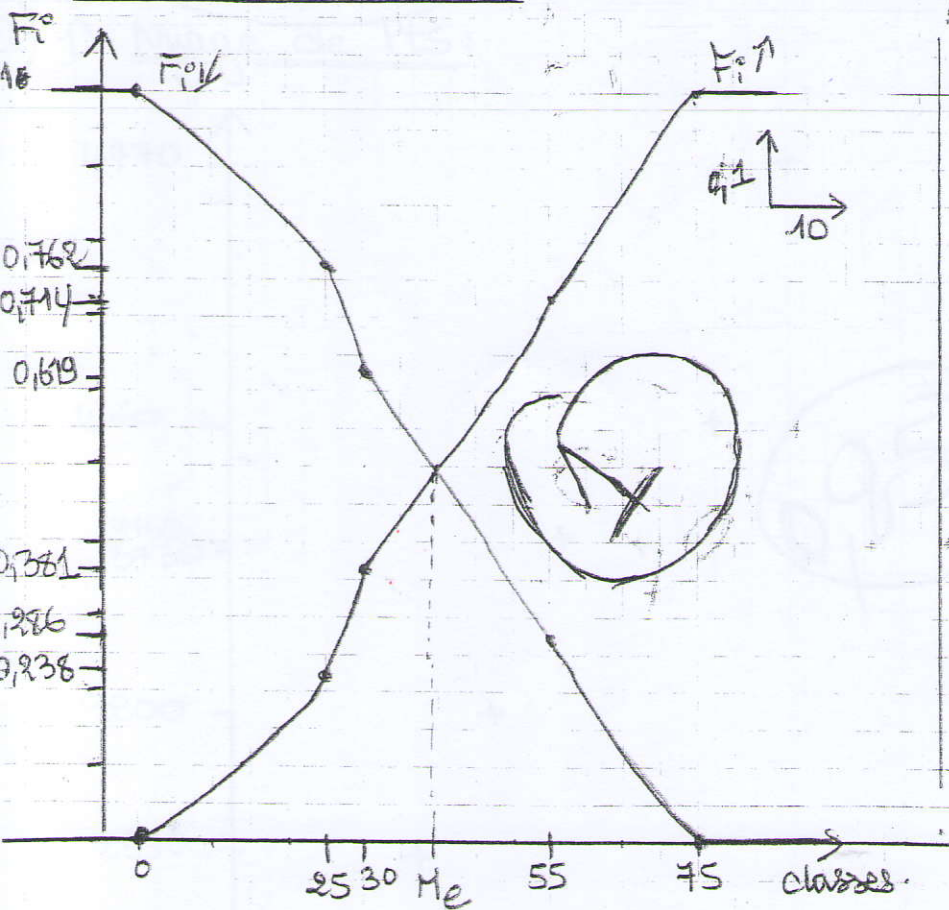
$$M_0 = \frac{e_i + a_i}{\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

$$= \frac{25 + 5}{\frac{0,096}{0,096 + 0,077}}$$

$$= 27,77$$

$M_0 = 27,77$

3) Courbes Cumulatives :



4) Mediane :

La classe médiane est [30,55[

$$M_e = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} \left(\frac{1}{2} - F_{(i-1)} \right)$$

$$= 30 + \frac{25}{0,333} (0,5 - 0,381)$$

$$= 38,934$$

$M_e = 38,934$

Moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 n_i x_i = \frac{832,5}{21} = 39,643$$

$\bar{x} = 39,643$

La variance

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{41043,75}{21} - (39,643)^2 = 382,897$$

$V(x) = 382,897$

le pourcentage des footballeurs qui ont été sélectionné entre 40 et 60 fois.

P4

$$F(40 \leq x < 60) = F(60) - F(40) = ?$$

$$F(40) = ?$$

$$F(40) = 0,381 + \frac{10}{25} \times 0,333 = 0,5142$$

$$F(40) = 0,5142$$

$$F(60) = ?$$

$$F(60) = 0,714 + \frac{5}{20} \times 0,286 = 0,7855$$

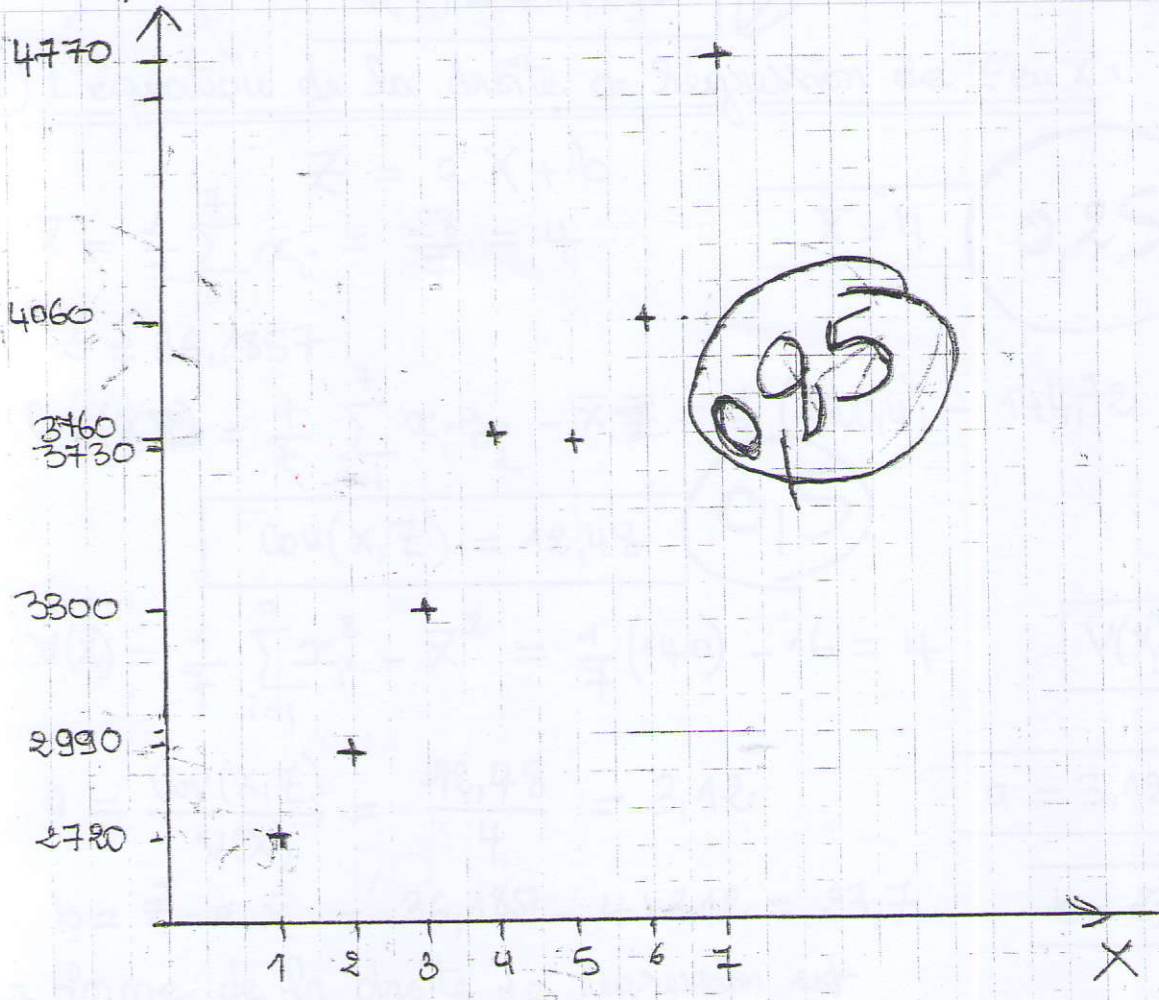
$$F(60) = 0,7855$$

$$F(60) - F(40) = 0,7855 - 0,5142 = 0,2713$$

Le pourcentage recherché est de 27,13%

Ex03: 07,50 Pts

I) 1) Nuage de Pts:



on pose $Z = Y/100$

15

Y	2720	2990	3300	3760	3730	4060	4770
Z	27,2	29,9	33	37,6	37,3	40,6	47,7

Calculer \bar{Z} et $V(Z)$:

$$\bar{Z} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 Z_i = \frac{253,3}{7} = 36,1857$$

$$V(Z) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 Z_i^2 - \bar{Z}^2 = \frac{9451,55}{7} - (36,1857)^2 = 41,229$$

$\bar{Z} = 36,1857$ 0,25

$V(Z) = 41,229$ 0,5

Déduire \bar{Y} et $V(Y)$:

$$Y = 100Z \Rightarrow \bar{Y} = 100\bar{Z} = 100 \cdot 36,1857 = 3618,57$$

$\bar{Y} = 3618,57$ 0,5

$$V(Y) = V(100Z) = (100)^2 V(Z) = 10000 \times 41,229 = 412290$$

$V(Y) = 412290$

2) L'équation de la droite de régression de Z en X:

$$Z = aX + b$$

$$\bar{x} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i = \frac{28}{7} = 4$$

$\bar{x} = 4$ 0,25

$$\bar{z} = 36,1857$$

$$\text{Cov}(X, Z) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i z_i - \bar{x} \bar{z} = \frac{1}{7} (1100,4) - 144,72 = 12,48$$

$\text{Cov}(X, Z) = 12,48$ 0,5

$$V(X) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{7} (140) - 16 = 4$$

$V(X) = 4$ 0,25

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{V(X)} = \frac{12,48}{4} = 3,12$$

$a = 3,12$ 0,5

$$b = \bar{z} - a \bar{x} = 36,1857 - 4 \times 3,12 = 23,7$$

$b = 23,7$

La forme de la droite de régression est

$$Z = 3,12X + 23,7$$

1) Coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Z)}} = \frac{12,48}{\sqrt{4} \sqrt{41,229}} = 0,972$$

0,5

$r = 0,972 \Rightarrow$ Il y'a une forte corrélation linéaire entre X et Z

0,25

II) On considère $Z = b a^X$

a) Déterminer a et b :

$$Z = b a^X \Rightarrow \ln(Z) = \ln(b a^X)$$

$$\ln(Z) = \ln(b) + X \ln(a)$$

0,25

On pose $V = \ln(Z)$, $B = \ln(b)$, $A = \ln(a)$.

Z	27,2	29,9	33	37,6	37,3	40,6	47,7
V	3,303	3,397	3,496	3,627	3,619	3,703	3,864

0,25

L'équation de la droite de régression est :

$$V = B + AX = AX + B$$

$$A = \frac{\text{Cov}(X, V)}{V(X)}, \quad B = \bar{V} + A \bar{X}$$

$$\text{Cov}(X, V) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i v_i - \bar{X} \bar{V}$$

0,25

$$\bar{V} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 v_i = \frac{25,009}{7} = 3,573$$

$\bar{V} = 3,573$

$$\text{Cov}(X, V) = \frac{1}{7} (102,454) - (14,292) = 0,344$$

$\text{Cov}(X, V) = 0,344$
0,25

$$A = \frac{\text{Cov}(X, V)}{V(X)} = \frac{0,344}{4} = 0,086$$

$A = 0,086$

$$B = \bar{V} + A \bar{X} = 3,573 - 4(0,086) = 3,229$$

0,5

$B = 3,229$

La forme de l'équation d'ajustement est $V = 0,086 X + 3,229$

Donc $A = 0,086 \Rightarrow a = e^A = e^{0,086} = 1,09$
 $B = 3,229 \Rightarrow b = e^B = e^{3,229} = 25,2$

0,5

2) L'équation de l'ajustement de Z en fonction de X est

$$V = 0,086 X + 3,229$$

$$V = \ln Z \Rightarrow \ln(Z) = \underbrace{0,086}_A X + \underbrace{3,229}_B$$

$$\Rightarrow Z = b a^X$$

$$Z = (25,2) (1,09)^X$$

0,25

3) Coefficient de corrélation :

$$V(V) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 V_i^2 - \bar{V}^2 = \frac{1}{7} (89,566) - (3,573)^2 = 0,103$$

0,25

$$r_{xv} = \frac{\text{Cov}(x,v)}{\sqrt{V(x)} \sqrt{V(v)}} = \frac{0,344}{\sqrt{4} \sqrt{0,03}} = 0,993$$

$$r_{xv} = 0,993$$

0,95

4) Le prix du fioul pour le 4^{ème} trimestre de l'année 2013 :

$$x_i = 8 \Rightarrow Z = ?$$

si on a :

$$Z_i = 3,12 X_i + 23,7 = 3,12(8) + 23,7 = 48,66$$

sinon :

$$Y_i = 100 \times Z_i = 100 \times 48,66 = 4866$$

$$Y = 4866$$

0,25

si non :

$$Z_i = ba^{X_i} = (25,2)(1,09)^{(8)} = 50,212$$

5) L'ajustement par l'équation

$$Z = (25,2)(1,09)^X \Leftrightarrow \ln Y = (25,2)(1,09)^X$$

est plus judicieux, parce que l'ajustement par la fonction logarithmique est meilleur que l'ajustement linéaire.

015

17