Maths 06

Université A.MIRA — Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie — 2ième Année

♣— Examen de Rattrapage d'Analyse Numérique —♣

Exercice 1 (10.00 points) : Soit l'équation suivante :

$$F(x) = e^{x^2} - 4x^2 = 0. \tag{1}$$

I– 1. Séparer graphiquement les racines de l'équation (1).

2. Montrer que l'équation (1) admet une racine unique α sur l'intervalle $I = [0, 1]$.
3. Déterminer le nombre minimal d'iterations nécessaires pour approcher, par la méthode de dichotomie, avec une précision $\epsilon = 10^{-5}$, la racine de l'équation (1) située sur l'intervalle I.
4. Calculer les trois premiers itérés.

II– 1. Écrire la suite de Newton associée à l'équation (1) dans l'intervalle $I_1 = [0.1, 0.7]$.

2. Vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton.
3. Pour $x_0 = 0.7$, calculer les quatre premières itérations. Conclure.

III– 1. On considère maintenant la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$, avec

$$g(x_n) = \frac{\sqrt{e^{x_n^2}}}{2}. \tag{2}$$

2. Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation $x = g(x)$.
3. Calculer la dérivée seconde de la fonction g.
4. Montrer que la méthode donnée en (2) est convergente dans l'intervalle I.
5. Pour $x_0 = \frac{1}{2}$, déterminer le nombre d'iterations nécessaires pour approcher la racine de l'équation (1), avec une précision $\epsilon = 10^{-6}$.
6. Calculer les quatre premières itérations.

Barème détaillé de l'exercice 1 :
I $- 02.00 + 01.00 + 00.50 + 00.75$, **II** $- 00.25 + 01.00 + 01.25$, **III** $- 00.25 + 00.50 + 01.00 + 00.50 + 01.00$

Exercice 2 (10.00 points) : On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ -6x_2 + 5x_1 + 2x_3 = -1, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \tag{3}$$

1. Résoudre le système (3) en utilisant la méthode de Cramer.
2. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss, déterminer le vecteur solution $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ et déduire le déterminant de A.
3. En utilisant la décomposition LU :
   a- Déterminer la matrice A^{-1} et déduire son déterminant.
   b- Déduire le déterminant de A.
   c- Déduire la solution du système $AX = b$.
   d- Résoudre le système (3).

Barème détaillé de l'exercice 2 : $02.00 + 02.00 + 06.00$

La rédaction claire et rigoureuse est exigée !

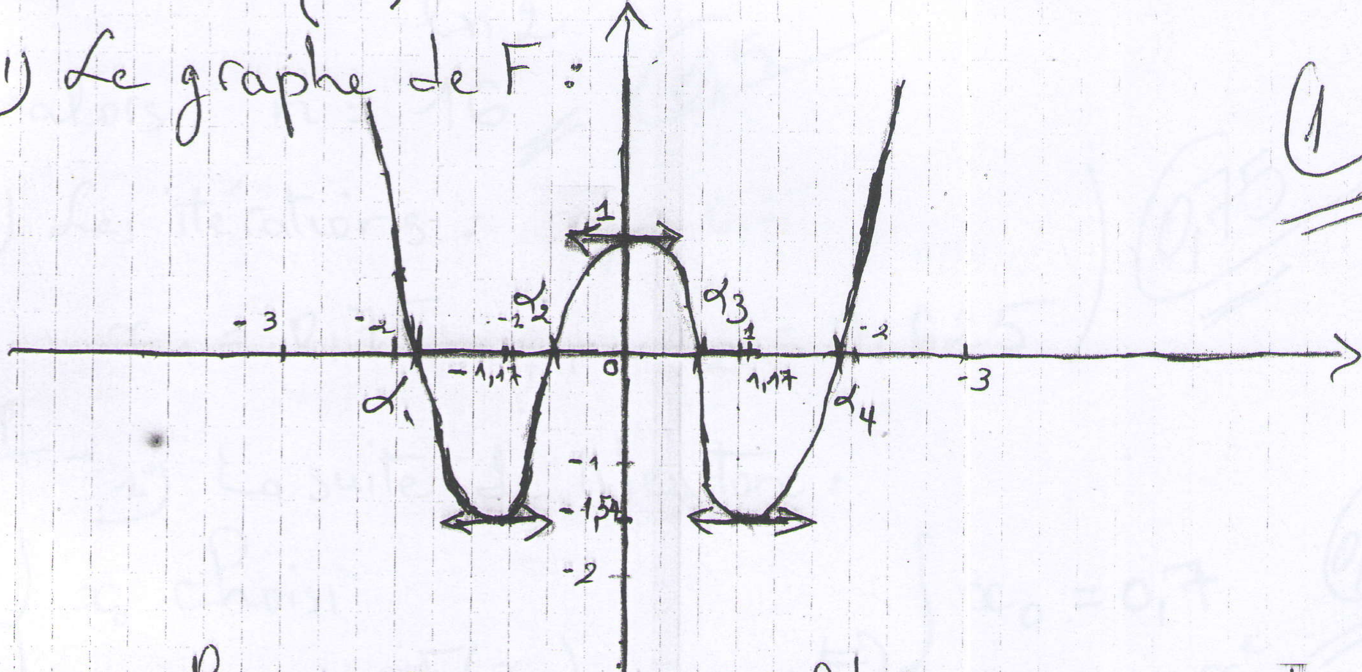
Bon Courage
✓ *Mr Boualem*

Corrigé de l'Examen de Rattrapage 13/14

Exercice N°01 :

I - $F(x) = e^{x^2} - 4x^2 = 0$

1) Le graphe de F :



1

Du graphe de F, on voit que l'équation (1) admet 4 racines :

- $\alpha_1 \in]-\infty, -\sqrt{\ln 4}[$, • $\alpha_2 \in]-\sqrt{\ln 4}, 0[$
- $\alpha_3 \in]0, \sqrt{\ln 4}[$, • $\alpha_4 \in]\sqrt{\ln 4}, +\infty[$

1

1 $\sqrt{\ln 4} = 1,1774$

2) L'unicité de α :

- F est définie et continue sur I.
- $\left.\begin{matrix} F(0) = 1 \\ F(1) = -1,2817 \end{matrix}\right\} \Rightarrow F(0)F(1) < 0$ • il existe au moins une racine $\alpha \in]0,1[$ / $F(\alpha) = 0$
- $F'(x) = 2x e^{x^2} - 8x < 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow F \downarrow$

Comme les trois conditions sont vérifiées alors la racine α est unique sur I.

3) Nombre d'itérations :

$$n > \frac{\ln\left|\frac{b-a}{\varepsilon}\right|}{\ln 2} - 1 = 15{,}61$$

alors, $n = 16$ 0,5

4) Les itérations : $x_0 = 0{,}5$

$x_1 = 0{,}75$, $x_2 = 0{,}625$ 0,75

II - 1°) La suite de Newton :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0{,}7 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n^2} - 4x_n^2}{2x_n e^{x_n^2} - 8x_n} \end{cases}$$ 0,25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0{,}7 \\ x_{n+1} = \dfrac{(2x_n^2 - 1)e^{x_n^2} - 4x_n^2}{2x_n e^{x_n^2} - 8x_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2°) Les conditions d'application :

- $F \in C^2([0.1, 0{,}7])$ car $\begin{cases} e^{x^2} \text{ est 2 fois dérivable} \\ x \text{ l'est aussi} \end{cases}$

- $\left.\begin{matrix} F(0{,}1) = 0{,}970 \\ F(0{,}7) = -0{,}328 \end{matrix}\right\} \Rightarrow F(0{,}1)\,F(0{,}7) < 0$ 0,25

- $F'(x) = 2x\,e^{x^2} - 8x < 0, \forall x \in I_1$ 0,25

• $F''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} - 8 < 0, \forall x \in [0,1 ; 0,7]$

(ne change pas de signe) 0,25

• Partant d'un $x_0 = 0.7$:

$F(0.7) = -0,3277$
$F''(0.7) = -1,5360$ $\Big\}$ $F(0.7)\,F''(0.7) > 0$ 0,25
$= 0,5033$

Comme les cinq condition sont vérifiées alors la suite de Newton (Voir Q1-II) converge vers α.

3°) Pour $x_0 = 0.7$, les itérations :

• $x_1 = x_0 - \dfrac{e^{x_0^2} - 4x_0^2}{2x_0 e^{x_0^2} - 8x_0} = 0,6011$

• $x_2 = 0,5978$

• $x_3 = 0,5978$ 1

• $x_4 = 0,5978$

Conclusion : La racine $\alpha = x_2$ à 10^{-4}. 0,25

III - Soit la suite du Point Fixe $x_{n+1} = g(x_n)$:

1) $F(x) = e^{x^2} - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = e^{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{e^{x^2}}{4}$

0,25 $\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{e^{x^2}}}{2} = g(x)$.

3) $g'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{e^{x^2}}} = \dfrac{x}{2}\sqrt{e^{x^2}}$, $\forall x \in I$

$g''(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e^{x^2}} + \frac{x}{2}\left(\dfrac{2x\, e^{x^2}}{2\sqrt{e^{x^2}}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e^{x^2}} + \frac{x^2}{2}\sqrt{e^{x^2}}$ 0,5

$= (1+x^2)\sqrt{e^{x^2}}/2$, $\forall x \in I$

4) La convergence de x_{n+1} :

g est une fonction définie et continue sur I.

$g'(x) = \dfrac{x\, e^{x^2}}{2\sqrt{e^{x^2}}} = \dfrac{x}{2}\sqrt{e^{x^2}} \geq 0, \forall x \in I \Rightarrow g \uparrow$

i) Stabilité : $g(I) \subset I$?

$g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [0.5 ; 0{,}8244] \subset I$

$\Rightarrow$ g est stable 0,5

ii) Contractance : $\exists k \,/\, 0 < k < 1 \,/\, k = \max_I |g'(x)|$

Comme $g''(x) = (1+x^2)\sqrt{e^{x^2}}/2 > 0, \forall x \in I$

$k = \max_I |g'(x)| = g'(1) = 0{,}8244 = g'(1) < 1$

$\Rightarrow$ g est contractance. 0,5

5) Pour $x_0 = \frac{1}{2}$,

$x_1 = g(x_0) = 0{,}5666$

Nombre d'itération du point fixe :

0,5

$$n > \frac{\ln\left[\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right]}{\ln k} = 66{,}52253$$

$$\Rightarrow n = 67.$$

6) Les itérations : $x_0 = \frac{1}{2}$

$x_1 = g(x_0) = 0{,}5666$

$x_2 = g(x_1) = 0{,}5871$

1

$x_3 = g(x_2) = 0{,}5940$

$x_4 = g(x_3) = 0{,}5964$

Exercice N° 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Par Cramer :

0,5

$\det A = -90 \neq 0$, la méthode de Cramer est applicable.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1 \quad 0{,}5$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 2 \quad 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad X = (1, 2, 3)^t$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 3 \quad 0{,}5$$

2) Par Gauss :

$A\,X = b \Longleftrightarrow \tilde{A}\,X = \tilde{b} \quad \ldots (*)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 5 & -6 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & 1/5 & 12/5 \\ 0 & -8 & 1 & -13 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} & \frac{63}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & \frac{1}{5} & 12/5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 13/8 \\ 0 & 0 & \frac{45}{20} & \frac{135}{20} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1   0,25

avec $\begin{cases} a_{11}^{(0)} = 5 \\ a_{22}^{(1)} = -8 \\ a_{33}^{(2)} = \cancel{45/20} \end{cases}$

- Résolution du système (3) :

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{13}{8} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff x = (1, 2, 3)^t \quad 0{,}5$$

- Déduire le det(A) :

$$\det(A) = \det(\tilde{A}) = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}^{(i-1)} = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)}$$

$$= 5(-8)\frac{45}{20} = -90 \quad 0{,}25$$

3) Décomposition LU :

a) $\begin{cases} \Delta_1 = 5 \neq 0 \\ \Delta_2 = -40 \neq 0 \\ \Delta_3 = -90 \neq 0 \end{cases} \overset{0{,}75}{\Longrightarrow} A = LU$

Avec :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{5} & \frac{-9}{20} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -0{,}8 & 0{,}45 & 1 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 2{,}25 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

Calcul de A^{-1} : $\det A = -90 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ 0,5

- $AV_1 = e_1 \Leftrightarrow LUV_1 = e_1 \Leftrightarrow \begin{cases} L y_1 = e_1 \\ U V_1 = y_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \left(1, -1, \frac{7}{20}\right)^t \\ V_1 = \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{90}, \frac{7}{45}\right)^t \end{cases}$$ 0,5

- $AV_2 = e_2 \Leftrightarrow LUV_2 = e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L y_2 = e_2 \\ U V_2 = y_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = \left(0, +1, \frac{9}{20}\right)^t \\ V_2 = \left(0, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)^t \end{cases}$$ 0,5

- $AV_3 = e_3 \Leftrightarrow LU V_3 = e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} L y_3 = e_3 \\ U V_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = (0, 0, 1)^t \\ V_3 = \left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{4}{9}\right)^t \end{cases}$$ 0,5

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{13}{90} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{18} \\ \frac{7}{45} & \frac{1}{5} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.111 & 0 & -0,111 \\ 0,1444 & -0,1 & 0,0556 \\ 0,1556 & 0,2 & 0,4444 \end{pmatrix}$$

Déduire le $\det(A^{-1})$:

$$\det(AA^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{-1}{90}$$ 0,25

b) $\det A = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U) = -90$ 0,5

c) Déduire la solution x :

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = (1, 2, 3)^t$$ 0,5

d) Résolution de système :

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & \ldots (1) \\ Ux = y & \ldots (2) \end{cases}$$

De (1) : $Ly = b \Leftrightarrow y = \left(12, -13, \frac{27}{4}\right)^t$ 0,5

De (2) : $Ux = y \Leftrightarrow x = (1, 2, 3)^t$ 0,5

4) Décomposition de Cholesky :

- A est symétrique :

Annulée

$$^tA = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq A.$$

donc A n'est pas symétrique.
Alors la méthode de Cholesky n'est pas souhaitable.

Dr Boualem et Bouziane

04/06/14