Solution

1

$$f \text{ hol dans } \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \longrightarrow 0{,}5$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -2y + 2x + 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x - 2y + 2 \end{cases} \longrightarrow 0{,}5$$

$$u(x,y) = \int (-2y + 2x + 1)\, dx = \underbrace{-2yx + x^2 + x + c(y)}_{0{,}5}$$

$$c'(y) - 2x = -2x - 2y + 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{c'(y) = -2y + 2}_{0{,}5}$$

$$\boxed{c(y) = -y^2 + 2y + C_0} \quad 0{,}25$$

$$\boxed{u(x,y) = -2yx + x^2 + x - y^2 + 2y + C_0} \quad 0{,}25$$

cherchons C_0 sous la condition $f(i+1) = 2i$

$$\boxed{f(i+1) = u(1,1) + i\, v(1,1) = 2i} \quad 0{,}25$$

$$\Rightarrow (C_0 + 1) + 2i = 2i \Rightarrow \boxed{C_0 = -1} \quad 0{,}25$$

$f(z)$ en fonction de z 8in 2 pts

la ~~même~~ (voir $f(z)$ du $1^{ère}$ sujet)

Ex 02

tout résultat non justifié sera noté sur "0"

• $A(x,y)$ où $\begin{cases} x = 2\cos\frac{\pi}{4} \\ y = 2\sin\frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow A(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \longrightarrow 0{,}25$

• Comme A et D sont symétrique par rapport à l'axe des x, $D(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \longrightarrow 0{,}25$

• $B(-1, y)$, comme $B \in$ cercle de centre O de rayon 2

donc $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow 1+y^2=4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

donc $B(-1, \sqrt{3}) \longrightarrow 0{,}5$

Comme C et B sont symétrique par rapport à l'axe des x, alors $C(-1, -\sqrt{3}) \to 0{,}5$

1) $\displaystyle\int_{OABCDO} = \underbrace{\int_{[OA]}}_{0{,}5} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{AB}}}_{0{,}75} + \underbrace{\int_{[BC]}}_{0{,}5} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{CD}}}_{0{,}75} + \underbrace{\int_{[DO]}}_{0{,}5}$

Sur $[OA]$: $z \in [OA] \Leftrightarrow z = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)t,\ t\in[0,1]$

$dz = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\,dt$

$\bar{z} = (\sqrt{2}-\sqrt{2}i)t$ $\quad 0{,}25$

$\displaystyle\int_{[OA]} = \int_0^1 (\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^2 t^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)t \, dt \longrightarrow 0{,}25$

malgré l'étudiant ne donne pas le résultat page 3

$z \in \overset{\frown}{AB} \iff z = 2e^{i\theta}, \quad \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$

$dz = 2ie^{i\theta}d\theta, \quad \bar{z} = 2e^{-i\theta}$

0,5

$\bullet \int_{(AB)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \left((2e^{-i\theta})^2 - 2e^{i\theta} \right) 2ie^{i\theta}\, d\theta$

0,25

le resultat n'est pas important.

$z \in [BC] \iff z = z_B + (z_C - z_B)t, \quad t \in [0,1]$

$= (-1+\sqrt{3}i) - 2\sqrt{3}it$

$\bar{z} = (-1-\sqrt{3}i) + 2\sqrt{3}t$

$dz = -2\sqrt{3}i\; dt$

0,5

$\bullet \int_{(BC)} = -2\sqrt{3}i \int_0^1 \left((-1-\sqrt{3}i) + 2\sqrt{3}t \right)^2 - \left((-1+\sqrt{3}i) - 2\sqrt{3}it \right) dt$

0,25

le resultat n'est pas important

$\bullet\ z \in \overset{\frown}{CD} \iff z = 2e^{i\theta}, \quad \theta \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}]$

$\bar{z} = 2e^{-i\theta}, \quad dz = 2ie^{i\theta}d\theta$

0,5

$\int = $ 8m (0,25

page 4

$$z\in[DO] \iff \begin{cases} z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\,t \\ \bar{z} = (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + (-\sqrt{2} - i\sqrt{2})\,t \\ dz = (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\,dt, \quad t\in[0,1] \end{cases}$$

0,5

$$\int_{[DO]} = (-\sqrt{2}+i\sqrt{2}) \int_0^1 \left(\left((\sqrt{2}+i\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}+i\sqrt{2})t \right)^2 - (\sqrt{2}-i\sqrt{2}) - (-\sqrt{2}+i\sqrt{2})t \right) dt$$

0,25

---

2) $$\int \frac{\cos z}{z-1}\,dz = 0$$

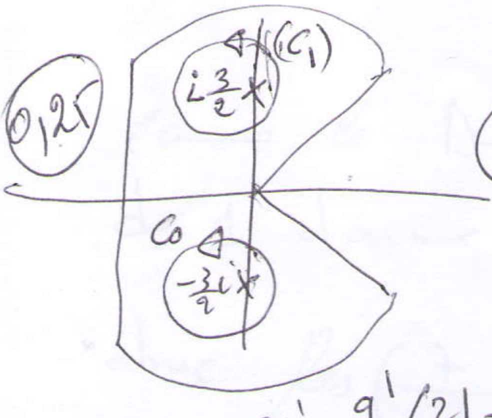
1pt

car le pt singulier $z_0 = 1$ se trouve à l'ext et la fonction $\frac{\cos z}{z-1}$ hol sur (C) et à l'int de (C).

(3) $$\int_{OABCD_O} \frac{\cos z}{(z+2)(z^2+\frac{9}{4})^2}\,dz = \int_{(C)} \frac{\frac{\cos z}{z+2}}{(z-\frac{3}{2}i)^2(z+\frac{3}{2}i)^2}\,dz$$

$$= \int_{(C_0)} \frac{\frac{\cos z}{(z+2)(z-\frac{3}{2}i)^2}}{(z+\frac{3}{2}i)^2}\,dz + \int_{(C_1)} \frac{\frac{\cos z}{(z+2)(z+\frac{3}{2}i)^2}}{(z-\frac{3}{2}i)^2}\,dz$$

0,25



1,25

$$= 2\pi i\, g_1'\left(-\frac{3}{2}i\right) + 2\pi i\, g_2'\left(\frac{3}{2}i\right)$$

où $g_1'(z) = \left(\frac{\cos z}{(z+2)(z-\frac{3}{2}i)^2} \right)'$, $g_2(z) = \frac{\cos z}{(z+2)(z+\frac{3}{2}i)^2}$

Exo3

① $\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$ faux 0,25 $\left(\begin{array}{l}\text{contre exemple} \\ \text{prenons } f(z) = e^{z}\end{array}\right)$

0,5

② $\displaystyle\int_{(C)} \frac{\bar{z}}{z^2}\, dz = 0$ juste 0,25 juste :

$z \in (C) \Rightarrow z = re^{i\theta}, \; dz = ire^{i\theta} d\theta, \; \bar{z} = re^{-i\theta}$

$$\int_{(C)} \frac{\bar{z}}{z^2}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{re^{-i\theta}}{r^2 e^{2i\theta}}\, ire^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} d\theta$$

$= 0$ 0,75

③ $\mathrm{Res}\left(\frac{7}{z^2-1} + 7 + 7z, 1\right) = 7$ faux. 0,25

car

$$\frac{7}{z^2-1} + 7 + 7z = \frac{7}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{7}{2}\frac{1}{z+1} + 7z + 7$$

$$= \frac{7}{2}(z-1)^{-1} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{z+1} + 7z + 7$$

Comme le Développement de Taylor de $\frac{1}{z+1}$ autour de 1 donne la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$

donc $\mathrm{Res}\left(\frac{7}{z^2-1} + 7 + 7z, 1\right) = \frac{7}{2}$ 0,75

Exo 4

page 6

Remarquez $(i+1)^2 = 2i$

$z^2 - 2i = 0 \Leftrightarrow z^2 - (i+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z - i - 1)(z + i + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = i+1 \\ \text{ou} \\ z = -1-i \end{array} \right\}$ les pts singuliers

1

2) $g(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - 2i} = \dfrac{e^z}{(z-(i+1))(z+1+i)}$

DL de $g(z)$ autour de $i+1$

$g(z) = \dfrac{h(z)}{z-(i+1)}$, où $h(z) = \dfrac{e^z}{z+i+1}$

On a $h(z) = h(i+1) + h'(i+1)(z-(i+1)) + \dfrac{h''(i+1)}{2!}(z-(i+1))^2 + \dots$

donc $\underbrace{g(z) = h(i+1)(z-(i+1))^{-1} + h'(i+1) + \dots}$

1,5

série de Laurent autour de $(i+1)$

DL de $g(z)$ autour de $-i-1$

on a

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z+1+i)}, \text{ où } h(z) = \frac{e^z}{(z-(i+1))}$$

$$h(z) = h(-i-1) + h'(-i-1)(z+1+i) + \dots$$

ce qui donne

$$\underbrace{g(z) = h(-i-1)(z+1+i)^{-1} + h'(-i-1) + \dots}_{}$$

série de Laurent de g autour de $-i-1$

1,5

$$\text{Res}(g, i+1) = h(i+1) = \frac{e^{i+1}}{2(i+1)}$$

1