M.N. Université A.MIRA — Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie — 2ième Année

♣— Examen Final S4 –– Méthodes Numériques —♣

Exercice 1 (10.00 Points) : Soit l'équation suivante :

$$F(x) = x - \cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = 0. \tag{1}$$

I–
1. Séparer graphiquement les racines de l'équation (1) dans l'intervalle $[0, 4]$.
2. Montrer que l'équation (1) admet une racine unique α sur l'intervalle $I = [0, 1]$.
3. Déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour approcher, par la méthode de dichotomie, avec une précision $\epsilon = 10^{-6}$, la racine de l'équation (1) située sur l'intervalle I.
4. Calculer les quatre premières itérations avec quatre chiffres significatifs après la virgule.

II–
1. Écrire la suite de Newton associée à l'équation (1) dans l'intervalle I.
2. Vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton.
3. Pour $x_0 = 1$, calculer les quatre premières itérations. Conclure.

III– On considère maintenant la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$, avec

$$g(x_n) = \cos\left(\frac{1}{1+x_n}\right). \tag{2}$$

1. Montrer que la méthode donnée en (2) est convergente dans l'intervalle I.
2. Pour $x_0 = 0$, déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la racine α de l'équation (1) située sur l'intervalle I, avec une précision $\epsilon = 10^{-6}$.
3. Calculer les quatre premières itérations avec quatre chiffres significatifs après la virgule.
4. Montrer que l'on a $|x_4 - \alpha| \leq 1.7074$.

Barème détaillé de l'exercice 1 :
I – 01.00 + 01.00 + 00.50 + 01.00, **II** – 00.25 + 01.00 + 01.50, **III** – 01.25 + 00.50 + 01.00 + 01.00

Exercice 2 (10.00 Points) : On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 66, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 168, \\ 15x_1 + 15x_3 + 14x_2 = 504. \end{cases} \tag{3}$$

I– Résoudre le système (3) en utilisant la méthode de Cramer.

II– En utilisant la méthode d'élimination de Gauss, déterminer :
1. Le vecteur solution $X = (x_1, x_2, x_3)^t$.
2. Le déterminant de A.
3. L'inverse de la matrice A.
4. Le déterminant de la matrice A^{-1}.

III– En utilisant la décomposition LU :
1. Calculer le déterminant de la matrice A.
2. Résoudre le système (3).
3. Déterminer la matrice A^{-1}.
4. Déduire la solution du système $AX = b$.

Barème détaillé de l'exercice 2 :
I – 01.00, **II** – 01.75 + 00.25 + 00.25 + 02.00 + 00.25, **III** – 00.75 + 01.00 + 00.25 + 00.50 + 01.50 + 00.50

La Rédaction Claire et Rigoureuse Est Exigée !

Bon Courage
✓ *Mr Boualem*

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique, 13/06/2015

Exo 1:

$$F(x) = x - \cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = 0 \quad \ldots (1)$$

I - 1) Séparation des racines :

- $F(0) = -0{,}5403$
  $F(4) = 3{,}0199$

0,25

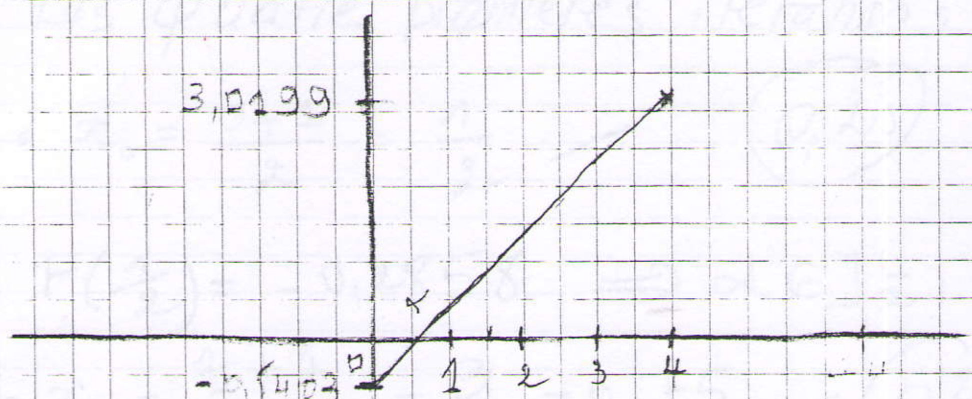
- $F'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2}\sin\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

0,25

$$= 1 + \frac{\sin\left(\frac{-1}{1+x}\right)}{(1+x)^2} > 0,\ \forall x \in [0,4].$$

Car $0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} < -1 \leq \frac{-1}{1+x} \leq -\frac{1}{5} < 0$

donc F est strictement croissante sur $[0,4]$.



0,5

D'après le graphe, on remarque que $\alpha \in [0,1]$.

2 - L'unicité de la racine :

- $F(x)$ est une fonction définie et continue sur $[0,1]$ 0,25
- $F(0) = -0,5403$, $F(1) = 0,1224$ $\Rightarrow F(0)F(1) < 0$ 0,25

$\Rightarrow$ Il existe au moins une racine $\alpha \in]0,1[$ tq $F(\alpha) = 0$ 0,25

- De plus, F est une fonction strictement monotone 0,25

Alors, la fonction F admet une racine unique dans I.

3) N^{bre} d'itération de Dichotomie :

$$n > \frac{\ln\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} - 1 = \frac{\ln(10^6)}{\ln 2} - 1 \quad 0,5$$

$$= 19,9315 - 1 = 18,9315$$

$$\Rightarrow n = 19$$

4) Les Quatre premières itérations (Dichotomie)

- $x_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ 0,25

$F(\frac{1}{2}) = -0,2858 \Rightarrow \alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$

- $x_1 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4} = 0,75$ 0,25

$F(\frac{3}{4}) = -0,091 \Rightarrow \alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$

• $x_2 = \frac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{7}{8} = 0,8750$ — 0,25

$F(7/8) = 0,0138 \Longrightarrow \alpha \in \left]\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right[$

• $x_3 = \frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{2} = 0,8125$ — 0,25

II - 1) Suite de Newton :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \text{ choisi} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - \cos\left(\frac{1}{1+x_n}\right)}{1 - \frac{1}{(1+x_n)^2}\sin\left(\frac{1}{1+x_n}\right)}, n \end{cases}$$ — 0,25

2) Conditions de Newton :

1) F est de classe $C^2([0,1])$ car $\begin{cases} x \text{ est 2 fois dérivables} \\ \cos\left(\frac{1}{1+x}\right) \text{ est aussi 2 fois dérivable} \end{cases}$ — 0,25

2) $F(0)F(1) < 0$, (voir Q2).

3) $F'(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}\sin\left(\frac{1}{1+x}\right) > 0, \forall x \in I$. — 0,25

4) $F''(x) > 0, \forall x \in I$ car : — 0,25

$$F''(x) = \frac{1}{(1+x)^4}\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{2}{(1+x)^3}\sin\left(\frac{1}{1+x}\right) > 0, \forall x \in$$

5) Partant d'un $x_0 = 1$, car $F(1)F''(1) = 0,021387 > 0$ — 0,25

Alors la suite de Newton donnée en II-1) converge vers la racine α unique de $F(x) = 0$

2) Pour $x_0 = 1$,

- $x_1 = x_0 - \dfrac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 0{,}8609$ 0,25

- $x_2 = x_1 - \dfrac{F(x_1)}{F'(x_1)} = 0{,}8587$ 0,25

- $x_3 = 0{,}8587$ 0,25

- $x_4 = 0{,}8587$ 0,25

On déduit que la racine approchée de $F(x) = 0$ à 10^{-4} est $x_2 = 0{,}8587 \simeq \alpha$ 0,5

III) - Point Fixe :

$$F(x) = 0 \iff x = \cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = g(x)$$ 0,25

1) Convergence :

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \sin\left(\frac{1}{1+x}\right) \geq 0 \quad \forall x \in I$$ 0,25

- Stabilité : $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow$

$g(I) \subset I$? $\quad g([0,1]) = [g(0), g(1)]$ 0,25

$$= [0{,}5403 ; 0{,}8775] \subset [0,1]$$

$\Rightarrow$ g est stable par I.

• Contractance : $\exists k$, $0 < k < 1$ tq $k = \max\limits_{I} |g'(x)|$

$$g''(x) = -\left[\frac{\cos\left(\frac{1}{1+x}\right)}{(1+x)^4} + \frac{2\sin\left(\frac{1}{1+x}\right)}{(1+x)^3}\right] < 0$$ 0,25

$\Rightarrow$ g' est décroissante, alors :

$K = |g'(0)| = 0,8414 < 1$ 0,25

$\Rightarrow$ g est contractante.

Comme les conditions de la méthode du pt fixe sont vérifiées alors la suite de point fixe donné

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

converge vers la racine unique α de $F(x) = 0$.

3) N^{bre} d'itération :

$$n > \frac{\ln\left(\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(k)} = \frac{\ln\left(\frac{(1-0,8414)10^{-6}}{|0,5403|}\right)}{\ln(0,8414)}$$

$$= \frac{-15,0412}{-0,1726} = 87,14\cancel{48}$$

$\Rightarrow n = 88$ 0,5

2) Pour $x_0 = 0$:

- $x_1 = g(x_0) = 0,5403$ — 0,25
- $x_2 = g(x_1) = 0,7965$ — 0,25
- $x_3 = g(x_2) = 0,8490$ — 0,25
- $x_4 = g(x_3) = 0,8572$ — 0,25

4) $|x_4 - \alpha| \leq 1,7074$?

D'après le cours on a :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

Pour $n = 4$,

$$|x_4 - \alpha| \leq \underbrace{\frac{(0,8414)^4}{(1-0,8414)} |0,5403|}_{= 1,7074}$$

D'où $|x_4 - \alpha| \leq 1,7074$ 1

Exo 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 15 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 66 \\ 168 \\ 504 \end{pmatrix}$$

1) Cramer :

0,25

On a $\det(A) = 6 \neq 0$ donc le système $Ax = b$ admet une unique solution $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ tq

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = \overline{1,3}.$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 66 & 2 & 1 \\ 168 & 5 & 4 \\ 504 & 14 & 15 \end{vmatrix}}{6} = 13, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 66 & 1 \\ 6 & 168 & 4 \\ 15 & 504 & 5 \end{vmatrix}}{6} = 6$$

0,25 0,25

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 66 \\ 6 & 5 & 168 \\ 15 & 14 & 504 \end{vmatrix}}{6} = 15$$

0,25

D'où $X = (13, 6, 15)^t$

2) Élimination de Gauss :

Détermination :

i) Le vecteur solution $X = (x_1, x_2, x_3)^t$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 66 \\ 6 & 5 & 4 & 168 \\ 15 & 14 & 15 & 504 \end{array} \right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\qquad A \qquad\qquad b \qquad\qquad\qquad I$$

$1^{ère}$ étape : $a_{11}^{(0)} = 3 \neq 0$.

$$\begin{array}{l} L_1^{(1)} = \frac{L_1^{(0)}}{2} \\ L_2^{(1)} = L_2^{(0)} - 6L_1^{(1)} \\ L_3^{(1)} = L_3^{(0)} - 15L_1^{(1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 22 \\ 0 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & 4 & 10 & 174 \end{array} \right) \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2^{ème}$ étape : $a_{22}^{(1)} = 1 \neq 0$

$$\begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 4L_2^{(2)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 22 \\ 0 & 1 & 2 & 36 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array} \right) \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$3^{ème}$ étape : $a_{33}^{(2)} = 2 \neq 0$

$$\begin{array}{l} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)}/2 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right.}_{\tilde{A}} \underbrace{\left. \begin{array}{|c} 22 \\ 36 \\ 15 \end{array} \right)}_{\tilde{b}} \qquad \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}}_{\tilde{I}_3}$$

0,75   0,25   0,75

$$A\,X = b \iff \tilde{A}\,X = \tilde{b}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 36 \\ 15 \end{pmatrix}$$

donc $X = (13, 6, 15)^t$ est la solution du système (3). 0,25

ii) $\det(A) = \det(\tilde{A}) = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}^{(i-1)} = a_{11}^{(0)} \times a_{22}^{(1)} \times a_{33}^{(2)}$

$= 3 \times 1 \times 2 = 6.$ 0,25

iii) $A^{-1} = ?$ 0,5

$\det(A) = 6 \neq 0$ donc A^{-1} existe.

Posons $A^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{matrix}}_{v_1} & \underbrace{\begin{matrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{matrix}}_{v_2} & \underbrace{\begin{matrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{matrix}}_{v_3} \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{e_1} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{e_2} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{e_3} \end{pmatrix}$

$$A\,A^{-1} = I_3 \iff A(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\iff (A v_1, A v_2, A v_3) = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\iff \begin{cases} A v_1 = e_1 \\ A v_2 = e_2 \\ A v_3 = e_3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \tilde{A}\, v_1 = \tilde{e}_1 & \ldots (1) \\ \tilde{A}\, v_2 = \tilde{e}_2 & \ldots (2) \\ \tilde{A}\, v_3 = \tilde{e}_3 & \ldots (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $V_1 = \left(\frac{19}{6}, -5, \frac{3}{2}\right)^t$ 0,5

(2) $\Rightarrow$ $V_2 = \left(-\frac{8}{3}, 5, -2\right)^t$ 0,5

(3) $\Rightarrow$ $V_3 = \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)^t$ 0,5

D'où
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{3}{2} \\ -5 & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

iv) $\det(A^{-1})$?

$$\det(A^{-1}) = \frac{\det(I_3)}{\det(A)} = \frac{1}{6}.$$ 0,25

3) La décomposition LU : $\Delta_i = \det(A_i) \neq 0$.

$\Delta_1 = \det(A_1) = 3 \neq 0$

$\Delta_2 = \det(A_2) = 3 \neq 0$

$\Delta_3 = \det(A_3) = \det(A) = 6 \neq 0$

donc on peut appliquer LU. 0,75

On pose :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12}+U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33} \end{pmatrix}$$

Par identification avec A, on obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0,1 0,1

a) $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \prod_{i=1}^{3} U_{ii}$

$= 3 \times 1 \times 2 = 6$ 0,2

b) Résolution du système (3) :

$$Ax = b \Longleftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b & \ldots (1) \\ Ux = y & \ldots (2) \end{cases}$$

$(1) \Longrightarrow y = (66, 36, 30)^t$ 0,2

$(2) \Longrightarrow x = (13, 6, 15)^t$ 0,2

c) A^{-1} ? $\det(A) = 6 \neq 0$ alors A^{-1} existe.

$$A A^{-1} = I_3 \iff A(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\iff A v_i = e_i$$

$$\iff L \underbrace{U v_i}_{y_i} = e_i \iff \begin{cases} L y_i = e_i \\ U v_i = y_i \end{cases}$$

$$i = \overline{1,3}.$$

• Pour $i=1$:

$$y_1 = (1, -2, 3)^t \quad 0,25$$

$$v_1 = \left(\frac{19}{6}, -5, \frac{3}{2}\right)^t \quad 0,25$$

• Pour $i=2$:

$$y_2 = (0, 1, -4)^t \quad 0,25$$

$$v_2 = \left(\frac{-8}{3}, +5, -2\right)^t \quad 0,25$$

• Pour $i=3$:

$$y_3 = (0, 0, 1)^t \quad 0,25$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)^t \quad 0,25$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{6} & \frac{-8}{3} & \frac{1}{2} \\ -5 & +5 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d) Déduire la solution du système $Ax=b$:

$$Ax=b \Longrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_3}x = A^{-1}b \quad (\text{comme } A^{-1} \text{ existe})$$

$$\Longrightarrow x = A^{-1}b$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{19}{6} & \frac{-8}{3} & \frac{1}{2} \\ -5 & +5 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 66 \\ 168 \\ 504 \end{pmatrix}$$

$= (13, 6, 15)^t$ est la solution du système $Ax=b$:

0,5