Filtres Passifs.

Un filtre est un quadripôle linéaire qui ne laisse passer que certains composants fréquentiels du signal appliqué à son entrée, en d'autres termes, il favorise certaines fréquences aux detriments d'autres.
Un filtre est un circuit dont la reponse en fréquence n'est pas constante.
En regime sinusoïdal, on le caracterise par sa fonction de Transfert complexe qui est le quotient de la tension de sortie V_S sur la tension d'entrée V_E

$$H(j\omega) = \frac{V_S}{V_E}$$

en notation complexe

$$H(j\omega) = G(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} \qquad \text{avec} \quad G(\omega) = \left|\frac{V_S}{V_E}\right|$$ gain du quadripôle

φ est le dephasage : $\varphi(\omega) = Arg(V_S) - arg(V_E)$.

Un filtre passif (constitué avec des éléments R, L et C) dissipe toujours de l'energie et la puissance disponible à la sortie est toujours inferieure à la puissance appliquée à l'entrée

Fréquence de coupure.

La fréquence de coupure d'un filtre est definie comme étant la fréquence pour laquelle le module de la fonction de Transfert est divisé par $\sqrt{2}$.

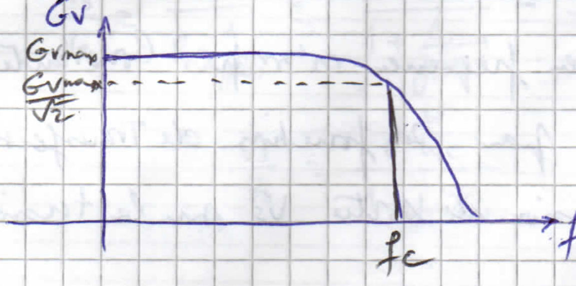
$$|G(\omega_c)| = \frac{|G(\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

le domaine de fréquence où le signal ~~...~~ passe est delimité par les fréquences de coupures, on l'appelle la bande passante.

Un filtre est dit du premier ordre si le denominateur de sa fonction de transfert est un polynome en ω de puissance 1.
Si le polynome en ω est de puissance 2 il est du 2nd ordre.
(ordre du filtre = la plus grande puissance de ω au dénominateur).

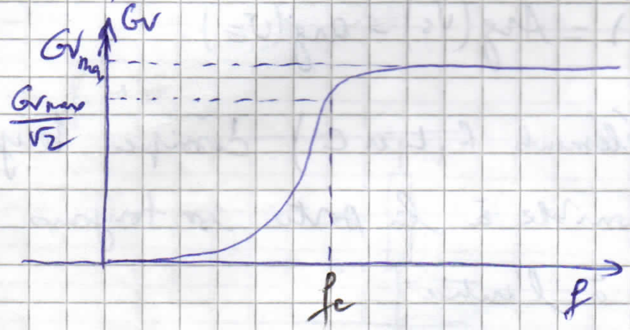
Les différents types de filtre.

- Filtre passe-Bas : Il ne laisse passer que les Composants de fréquences inférieures ou égales à la fréquence de Coupure du filtre. Il atténue les fréquences supérieures à fc



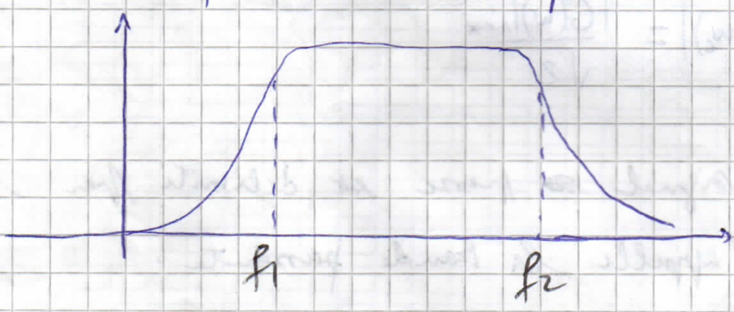
Bande passante $[0 ; fc]$

- Filtre passe-Haut : Il ne laisse passer que les ~~fréquences~~ Composants de fréquences supérieures ou égales à la fréquence de Coupure du filtre. Il atténue les fréquences inférieures à fc



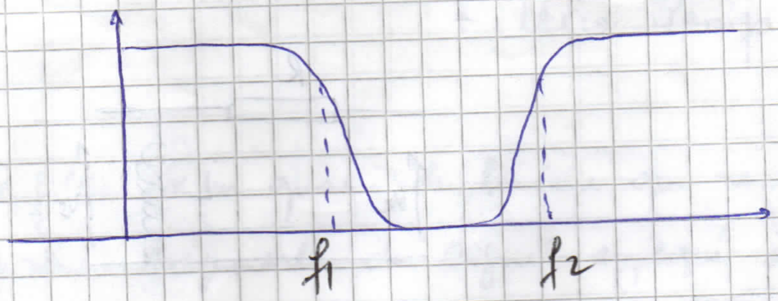
Bande passante $[fc, \infty[$

- Filtre passe Bande : Il ne laisse passer que les Composants de fréquences Comprises entre la fréquence de Coupure Basse et la fréquence de Coupure haute



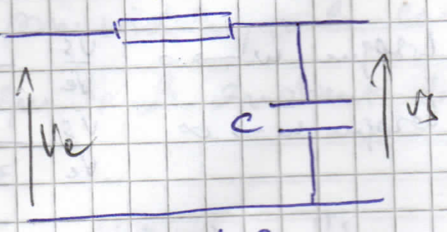
Bande passante $[f_1 ; f_2]$.

- Filtre Coupe Bande : Il atténue les Composants de fréquence appartenant à la Bande de fréquences, Comprises entre la fréquence de Coupure Basse et la fréquence de Coupure haute du filtre. Il est aussi appelé filtre Rejecteur

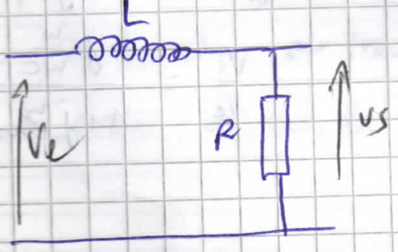


Bande passante
$]0; f_1] \cup [f_2; \infty[$

Exemples de
Passe Bas :



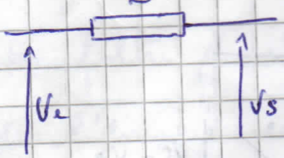
$\tau = RC$



$\tau = \frac{L}{R}$

Aux basses fréquences : $f \to 0$. (Montage a)

le condensateur a une impédance élevée, donc un circuit ouvert :



$V_s = V_e$

Si nous utilisons la regle du Diviseur de Tension :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

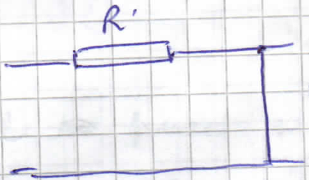
on pose $\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

$\omega \to 0 \quad \frac{V_s}{V_e} \to 1 \quad \Rightarrow V_s = V_e$

$\omega \to \infty \quad \frac{V_s}{V_e} \to \frac{1}{\infty} = 0$

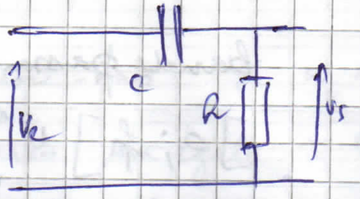
Aux hauts fréquences : $f \to \infty$

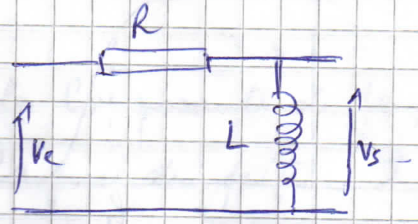
$\frac{1}{jC\omega} \to 0$. Court-circuit de C



$V_s = 0$.

Exemple de passe haut.





$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1+\frac{1}{jRC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

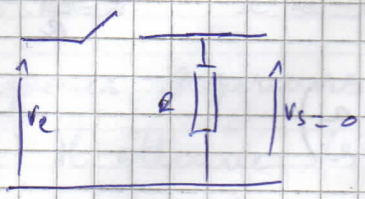
posons $\omega_c = \frac{1}{RC}$

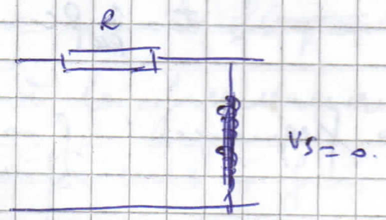
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\,\omega/\omega_c}$$

Lorsque $\omega \to 0$ $\quad \frac{V_s}{V_e} \to 0. \quad V_s = 0$

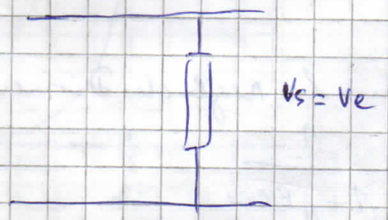
Lorsque $\omega \to \infty$ $\quad \frac{V_s}{V_e} \to 1 \quad V_s = V_e$

$f \to 0$





$f \to \infty$



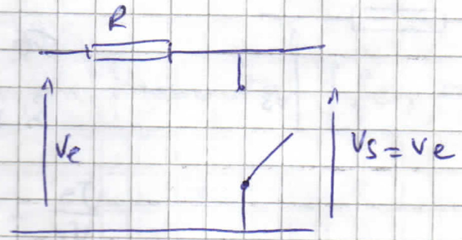


Diagramme de Bode.

La fonction de transfert nous renseigne sur le degré du filtre ainsi que sur les caractéristiques du filtre (fréquence de coupure, Bande passante, Constante de temps).

La fonction de Transfert est caractérisée
- par son module (ou gain) : $G(\omega) = |H(j\omega)|$
- par son argument (ou déphasage entre vs et ve)

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$$

Elle peut s'écrire sous la forme

$$H(j\omega) = G(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

La réponse en fréquence d'un circuit est représentée par le tracé de deux courbes :
- Variation de $G(\omega)$ en fonction de la fréquence f (ou pulsation)
- Variation de $\varphi(\omega)$ en fonction de la fréquence f (ou ω).

Ces deux courbes sont connues sous le nom de diagramme de Bode.

Decibels

Le gain en tension $G(\omega) = \left|\frac{v_s}{v_e}\right|$ peut avoir une valeur très faible ou très élevée, il est alors pratique de l'exprimer en decibels, sur une échelle logarithmique.

On définit le gain d'un filtre en decibels (dB) par :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} G(\omega).$$

$$G_{dB} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < |H(j\omega)| < 1$$

$$G_{dB} > 0 \quad \text{pour} \quad |H(j\omega)| > 1$$

La gamme des fréquences étant très larges, lors du tracé des fonctions de Transfert, on utilise une échelle logarithmique pour l'axe des fréquences. Pour caractériser l'axe des freq, on utilise soit la decade, soit l'octave.
une decade correspond à une multiplication de la fréquence par 10.
une octave correspond à un doublement de la fréquence.

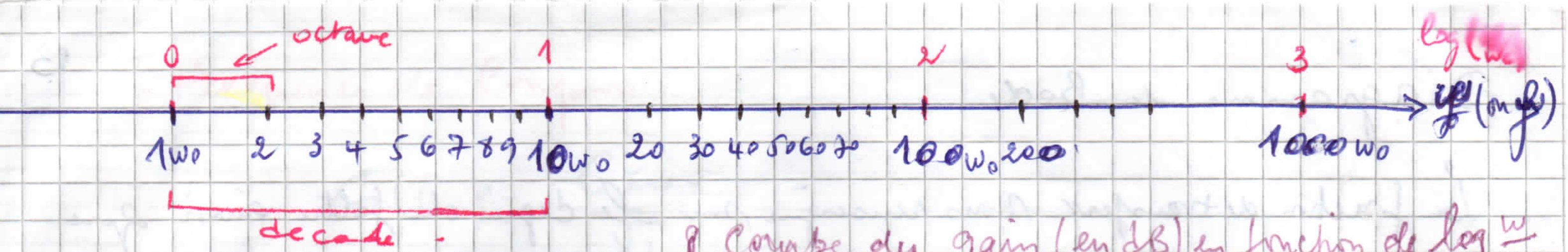
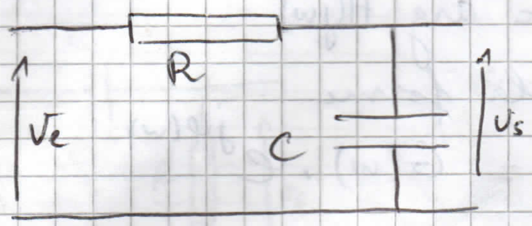


Diagramme de Bode = { Courbe du gain (en dB) en fonction de $\log \frac{w}{w_c}$; Courbe de la phase de la fonction de Transfert en fonction de $\log \frac{w}{w_c}$ (ou $\log(\frac{f}{f_c})$)

Diagramme de Bode Asymptotique

1- Exemple de circuit RC.



$v_e = V_e \cos(wt + \varphi)$

$$H(jw) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{1}{1 + jRCw}$$ on pose $w_0 = \frac{1}{RC}$

$$H(jw) = \frac{1}{1 + j\frac{w}{w_0}} = G(w) \cdot e^{j\varphi(w)}$$

avec $$G(w) = |H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2}}$$

$$\varphi(w) = -\arctg\left(\frac{w}{w_c}\right)$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10} G(w)$$

⊛ En Basse fréquence : $w << w_0$

$$G_{dB} = 20 \log 1 - \frac{1}{2} 20 \log\left[1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^2\right]$$

$$G_{dB} = -10 \log_{10}\left(1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^2\right)$$

$$\lim_{w \to 0} G(w) = 1$$

$\lim_{w \to 0} G_{dB} = 0$ on a une assymptote horizontale

$\lim_{w \to 0} \varphi(w) = 0$ on a une assymptote horizontale aussi.

⊛ En haute frequence : $w \gg w_0$

$w \to \infty \quad G_{dB} = -20 \log\left(\frac{w}{w_c}\right)$; c'est de la forme $y = -20x$, donc une droite

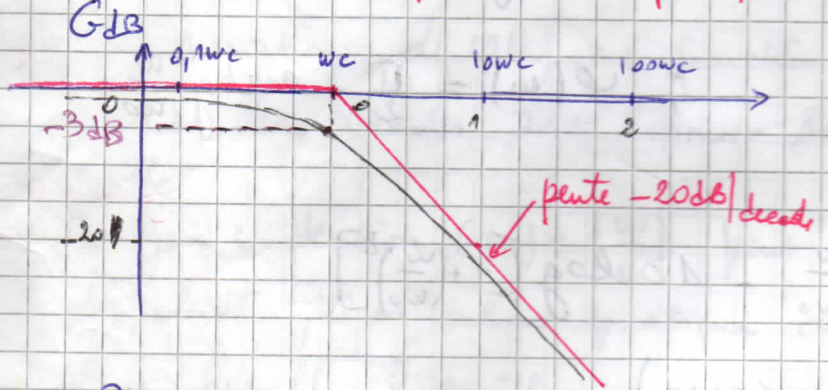
- pour $w = w_0 \quad G_{dB} = -20 \log 1 = 0\,dB$.
- pour $w = 10w_0 \quad G_{dB} = -20 \log 10 = -20\,dB$.

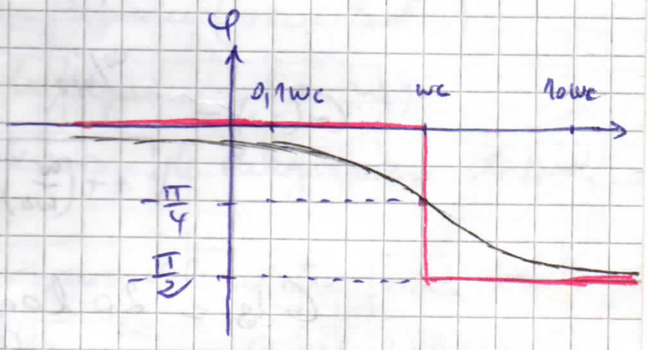
L'Asymptote est une droite oblique de pente $-20\,dB/decade$

$\lim_{w \to \infty} \varphi(w) = -\frac{\pi}{2}$ on a donc une asymptote horizontale à $+\infty$

- Le Diagramme asymptotique se limite à 2 droites de pente 0 et $-20\,dB$ par decade.

- La Phase varie de 0 à $-\frac{\pi}{2}$. Elle est égale à $-\frac{\pi}{4}$ pour $w = w_c$ (frequence de coupure).





⊕ Passage du diagramme asymptotique au diagramme réel

Pour $w = w_c$ on a $G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^2}} = -10 \log(1+1)$

- $G_{dB} = -10 \log_{10} 2 = -3\,dB$.

- $\varphi(w) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Pour $w < 0{,}1\,w_c$ et $w > 10\,w_c$, les diagrammes réels se confondent avec les diagrammes asymptotiques

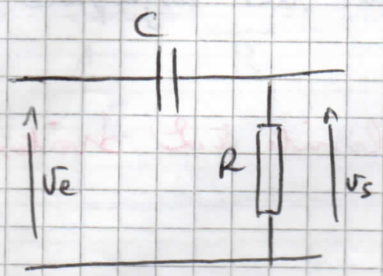
- Frequence de Coupure.

$$G(w_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$G_{dB}(w_c) = \cancel{G_{dB\,max}}\ 20 \log G(w_c) = 20 \log G_{max} - 20 \log \sqrt{2}$$

$$G_{dB}(w_c) = G_{dB\,max} - 3\ dB$$

2. Exemple de Circuit C.R.



$ve = Ve \cos(wt + \varphi)$

$$H(jw) = \frac{R}{R + \frac{1}{jCw}} = \frac{jRCw}{1 + jRCw}$$

posons $w_0 = \frac{1}{RC}$ $\qquad H(jw) = \dfrac{j\, w/w_0}{1 + j\, w/w_0}$

$$G(w) = \frac{w/w_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi(w) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{w}{w_0}$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{w}{w_0} - 10 \log\left[1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right]$$

En Basse frequence $(w \ll w_0)$

- $\lim_{w \to 0} G(w) = 0$ $\qquad \lim_{w \to 0} G_{dB} \to -\infty$

on a une asymptote d'equation $G_{dB} = 20 \log \frac{w}{w_c}$
C'est une droite oblique de pente 20 dB/decade.

- $\lim_{w \to 0} \varphi(w) = \frac{\pi}{2}$.

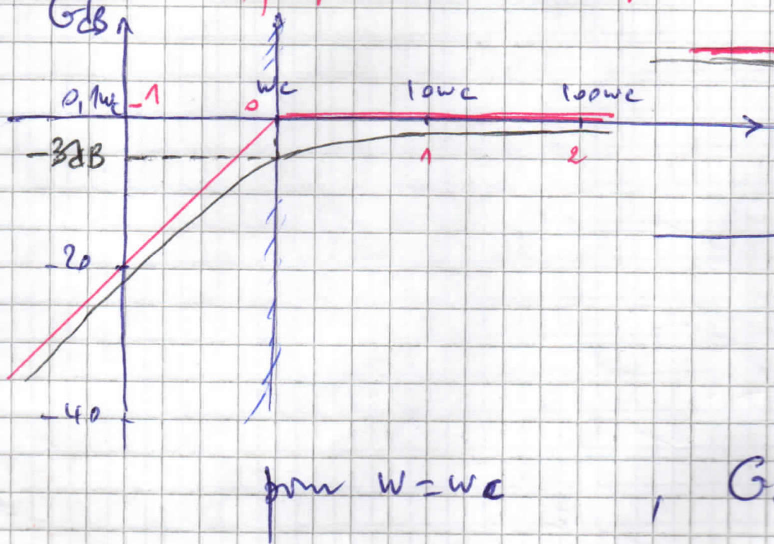
⊛ En haute fréquence - ($w >> w_0$)

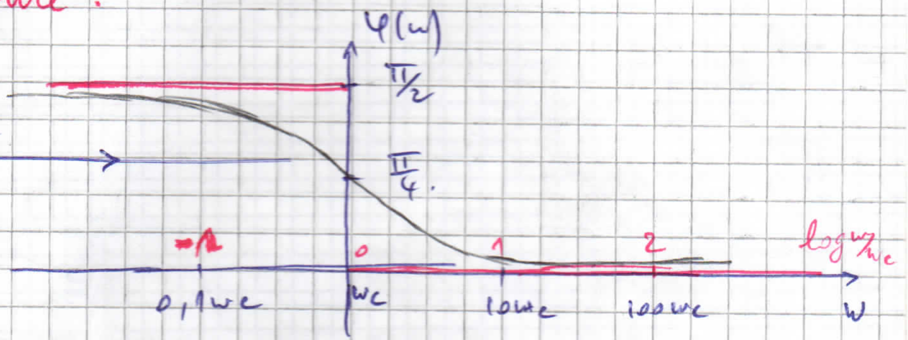
$$\lim_{w \to \infty} G(w) = 1 \qquad \lim_{w \to \infty} G_{dB} = 0.$$

$$\lim_{w \to \infty} \varphi(w) = 0$$

Le diagramme asymptotique se limite à 2 droites de pente 0 et +20 dB/décade

La phase varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0. Elle est égale à $+\frac{\pi}{4}$ pour la fréquence de coupure.





pour $w = w_c$, $G_{dB} = 20 \log 1 - 10 \log(1+1)$

$$G_{dB} = -3 \text{ dB}$$

$$\varphi(w_c) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } 1$$

$$\varphi(w_c) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$