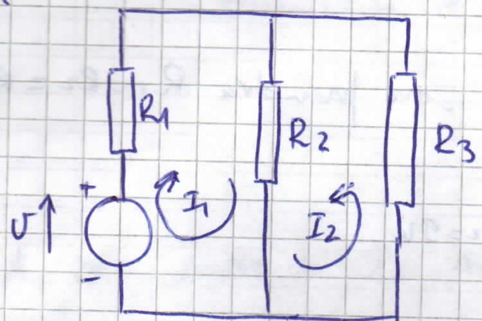
Chapitre II : Théorèmes Fondamentaux.

1. Théorème de réciprocité.

définition : Si une f.e.m E insérée dans une branche d'un réseau, produit un Courant I dans une autre branche, réciproquement cette f.e.m E insérée dans ~~une~~ cette deuxième branche produira le même Courant I dans la première.

Ex.



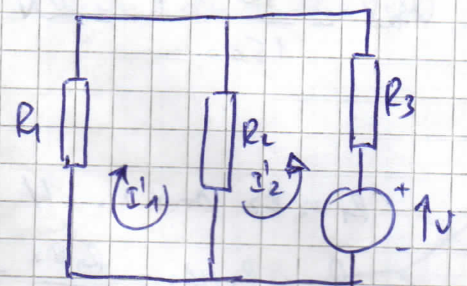
$$\begin{cases} V = R_1 I_1 + R_2(I_1+I_2) \\ 0 = R_2(I_1+I_2) + R_3 I_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(R_1+R_2) I_1 + R_2 I_2 = V$$
$$R_2 I_1 + (R_2+R_3) I_2 = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1+R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix} = (R_1+R_2)(R_2+R_3) - R_2^2 = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & R_2 \\ 0 & R_2+R_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(R_2+R_3)}{\Delta} V$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1+R_2) & V \\ R_2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{R_2}{\Delta} V$$



$$R_1 I'_1 + R_2(I'_1+I'_2) = 0$$
$$R_2(I'_1+I'_2) + R_3 I'_2 = V$$

$$(R_1+R_2) I'_1 + R_2 I'_2 = 0$$
$$R_2 I'_1 + (R_2+R_3) I'_2 = V$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1+R_2) & R_2 \\ R_2 & (R_2+R_3) \end{vmatrix} = (R_1+R_2)(R_2+R_3) - R_2^2 = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$$

$$\cancel{I'_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1+R_2) & 0 \\ R_2 & V \end{vmatrix}}{\Delta}} \qquad I'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_2 \\ V & (R_2+R_3) \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{R_2}{\Delta} V$$

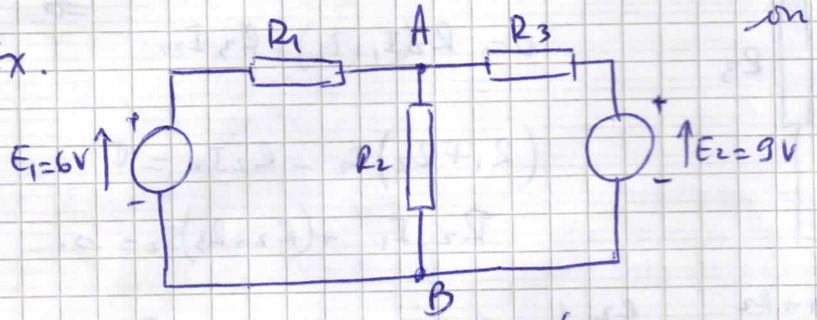
on vérifie que $i_1 = i_2$, ce qui vérifie le Théorème.

2. Théorème de Superposition.

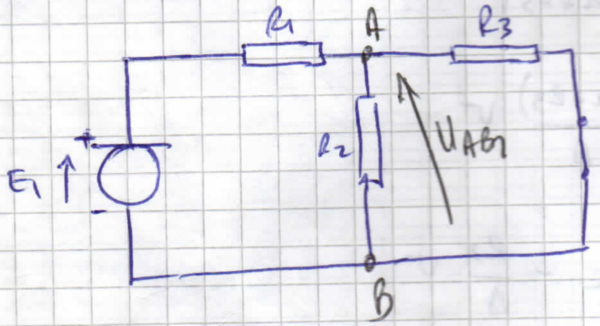
Définition : La tension (le Courant) entre 2 points A et B d'un Circuit linéaire Contenant plusieurs sources, est égale à la somme algébrique des tensions (des Courants) que produirait entre A et B chaque source du Circuit, les autres étant remplacés par leur résistance interne.

on prendra $R_1 = R_2 = R_3 = 1K\Omega$

Ex.



1) on Court circuite E_2 (annulation d'une Source de tension).



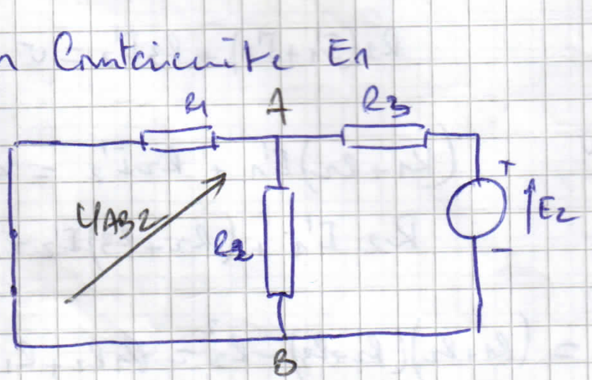
R_2 et R_3 sont en //

$$R = R_2 // R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 500\,\Omega$$

$$U_{AB1} = \frac{R}{R + R_1} E_1 \quad (R.D.T)$$

$$U_{AB1} = \frac{500}{1500} \cdot 6 = 2V$$

2) on Courtcircuite E_1



R_1 et R_2 sont en //

$$R = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 500\,\Omega$$

$$U_{AB2} = \frac{R}{R + R_3} E_2 = \frac{500}{1500} \cdot 9$$

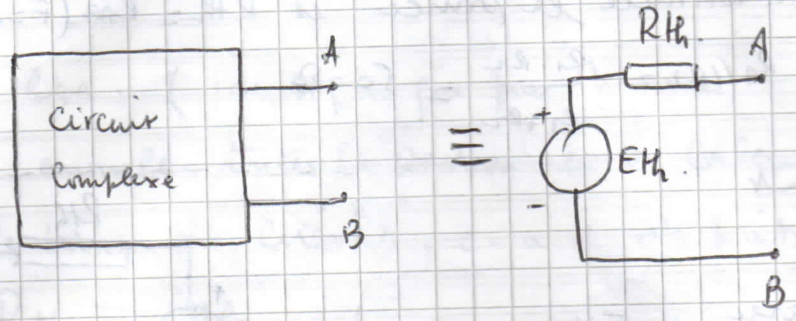
$$U_{AB2} = 3V.$$

3) on fait une Synthèse $U_{AB} = U_{AB1} + U_{AB2} = 3 + 2 = 5V$

3. Théorème de Thévenin.

Définition :

Tout réseau électrique linéaire contenant un nombre arbitraire de source de tension (et/ou de courant), peut être ramené à un dipôle actif contenant une seule source de tension en série avec une seule impédance.

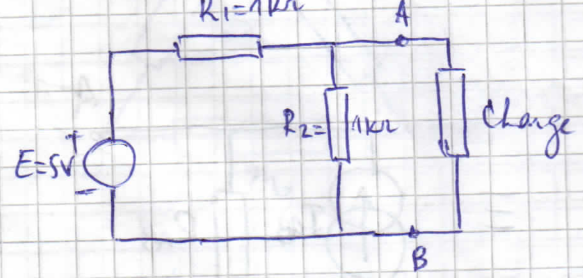


But : Remplacer un circuit complexe par un circuit composé d'une source de tension et une résistance en série.

Procédure :

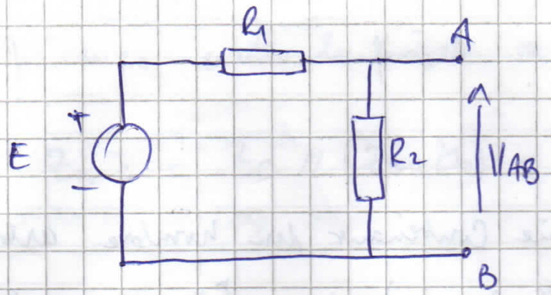
- Identifier les bornes du circuit et la charge externe.
- Mesurer ou calculer la tension aux bornes du circuit sans charge extérieure. C'est la tension de Thevenin
- Annuler les sources et déterminer la résistance vue des bornes du circuit. C'est la résistance de Thevenin.

Ex : Soit le circuit suivant :



- Calcul de ETh.

on distingue la charge du circuit actif à modeliser, puis on deconnecte la charge.



la tension Eth est égale à la tension UAB lorsque la charge est déconnecté (A vide).

$$E_{th} = U_{AB} = \frac{R_2}{R_1+R_2} E = \frac{1}{2} E = 2{,}5V$$

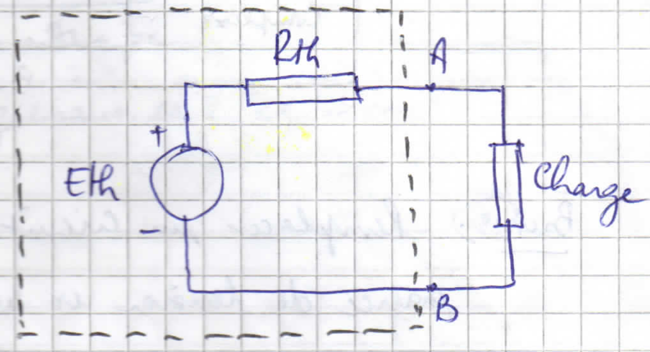
. Calcul de Rth

on annule la source et $R_{th} = R_{AB} (E=0)$.

$$R_{AB} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = 500\Omega$$

Modele équivalent :

$$U_{AB} = \frac{Charge}{Charge + R_{th}} \cdot E_{th}$$

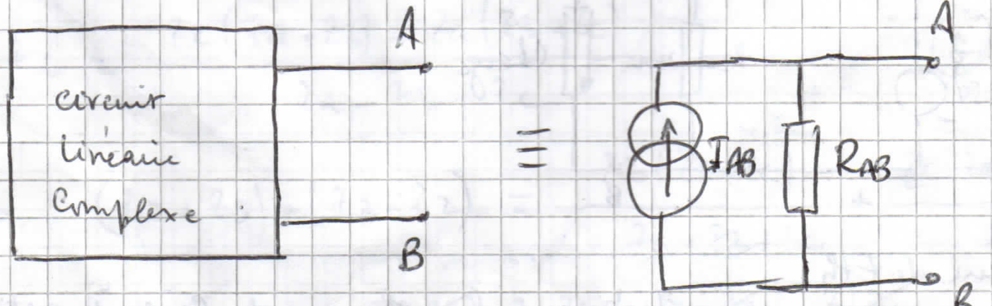


4- Théorème de Norton

Definition :

Tout reseau linéaire, vue de 2 points A et B, est modélisable de l'exterieur par un generateur unique constitué par l'association en parallele d'un générateur de courant IAB et d'une resistance RAB.

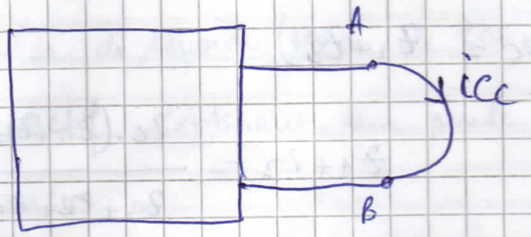
~~Rappel~~



But : Remplacer un circuit Complexe par un circuit Composé d'une source de courant en parallèle avec une resistance

Calcul de I_{AB} :

Le Courant I_{AB} est le Courant i externe qui circulerait dans un Court-circuit des points A et B.



calcul de R_{AB}. (identique que pour Thevenin)

on annule toutes les sources et on calcule la résistance vue des bornes du circuit, c-a-d des points A et B

$R_N = R_{AB}$

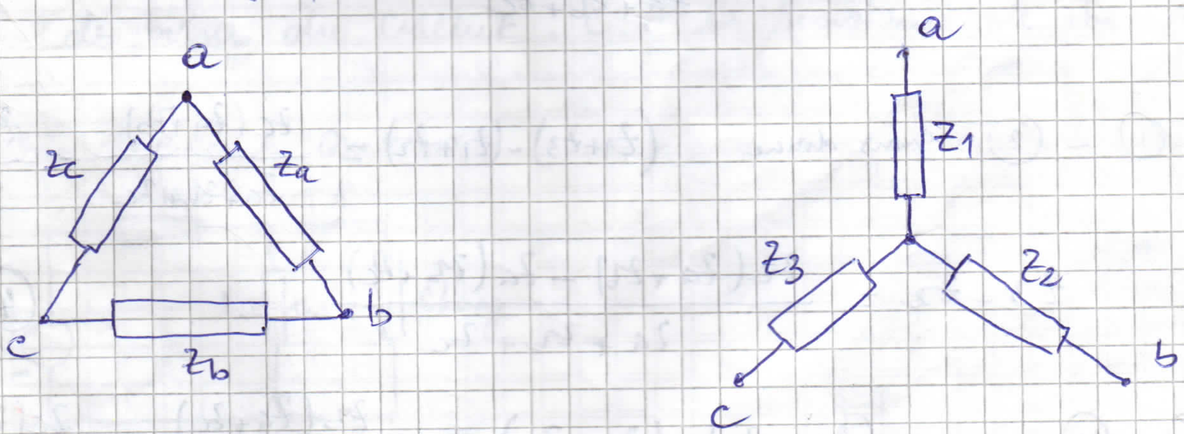
(*) Equivalence Norton ⟷ Thevenin. ⟵ faire Th. de réciprocité

5 - Théorème de Kennely.

Certains réseaux sont constitués ~~par~~ de résistances qui ne sont ni en série ni en parallèle.

A - Passage d'un circuit triangle en un circuit étoile ($\Delta \to Y$)

Soient 2 montages, l'un en triangle, l'autre en étoile.



Dans les 2 cas les impédances entre les points a et b, a et c et les points b et c sont identiques.

établissons une relation entre Z_1, Z_2, Z_3 et Z_a, Z_b et Z_c.

L'impédance entre les points a et c :

$$Z_{a-c} = Z_c \,//\, (Z_a + Z_b) = \frac{Z_c\cdot(Z_a+Z_b)}{Z_a+Z_b+Z_c} \quad \text{pour le Montage } \Delta$$

Pour le Montage Y $\quad Z_{a-c} = Z_1 + Z_3$.

en égalisant on aura $\quad Z_1 + Z_3 = \dfrac{Z_c\cdot(Z_a+Z_b)}{Z_a+Z_b+Z_c} \quad (1)$

Faisons la même approche pour les points a et b.

$$\Delta \rightarrow \quad Z_{a-b} = Z_a \,//\, (Z_c+Z_b) = \frac{Z_a\cdot(Z_b+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c}$$

$Y \rightarrow \quad Z_{a-b} = Z_1 + Z_2$ $\quad$ en égalisant les 2 équations :

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_a(Z_b+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c} \quad (2)$$

Faisons la même approche pour les points b et c.

$$\Delta \longrightarrow \quad Z_{b-c} = Z_b \,//\, (Z_a+Z_c) = \frac{Z_b\cdot(Z_a+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c}$$

$Y \longrightarrow \quad Z_{b-c} = Z_2 + Z_3$ $\quad$ en égalisant :

$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_b(Z_a+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c} \quad (3)$$

(1) − (2) nous donne $\quad (Z_1+Z_3)-(Z_1+Z_2) = \dfrac{Z_c(Z_a+Z_b)}{Z_a+Z_b+Z_c} - \dfrac{Z_a(Z_b+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c}$

$$Z_3 - Z_2 = \frac{Z_c(Z_a+Z_b) - Z_a(Z_b+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c} \quad (4)$$

(3) + (4) $\Rightarrow \quad (Z_2+Z_3)+(Z_3-Z_2) = \dfrac{Z_b(Z_a+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c} + \dfrac{Z_c(Z_a+Z_b)-Z_a(Z_b+Z_c)}{Z_a+Z_b+Z_c}$

$$2Z_3 = \frac{\cancel{Z_bZ_a} + Z_bZ_c + \cancel{Z_cZ_a} + Z_cZ_b - \cancel{Z_aZ_b} - \cancel{Z_aZ_c}}{Z_a+Z_b+Z_c}$$

$$2Z_3 = \frac{2Z_bZ_c}{Z_a+Z_b+Z_c} \Rightarrow \boxed{Z_3 = \frac{Z_bZ_c}{Z_a+Z_b+Z_c}} \quad (5)$$

$$(1) - (3) \quad (Z_1 + Z_3) - (Z_2 + Z_3) = \frac{Z_c(Z_a + Z_b)}{Z_a + Z_b + Z_c} - \frac{Z_b(Z_a + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_1 - Z_2 = \frac{Z_c(Z_a + Z_b) - Z_b(Z_a + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c} \quad (6)$$

$$(6) + (2) \quad (Z_1 - Z_2) + (Z_1 + Z_2) = \frac{Z_c(Z_a + Z_b) - Z_b(Z_a + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c} + \frac{Z_a(Z_b + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$2Z_1 = \frac{Z_cZ_a + \cancel{Z_cZ_b} - \cancel{Z_bZ_a} - \cancel{Z_bZ_c} + \cancel{Z_aZ_b} + Z_aZ_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$2Z_1 = \frac{2Z_aZ_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \qquad \boxed{Z_1 = \frac{Z_aZ_c}{Z_a + Z_b + Z_c}} \quad (7)$$

$$(3) - (4)$$

$$(Z_2 + Z_3) - (Z_3 - Z_2) = \frac{Z_b(Z_a + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c} - \frac{Z_c(Z_a + Z_b) - Z_a(Z_b + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$2Z_2 = \frac{Z_bZ_a + \cancel{Z_bZ_c} - \cancel{Z_cZ_a} - \cancel{Z_cZ_b} + Z_aZ_b + \cancel{Z_aZ_c}}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$2Z_2 = \frac{2Z_aZ_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \qquad \boxed{Z_2 = \frac{Z_aZ_b}{Z_a + Z_b + Z_c}} \quad (8)$$

B - Passage d'un circuit Etoile en un circuit triangle

$$\frac{(5)}{(7)} \Rightarrow \frac{Z_3}{Z_1} = \frac{\frac{Z_bZ_c}{Z_a + Z_b + Z_c}}{\frac{Z_aZ_c}{Z_a + Z_b + Z_c}} = \frac{Z_b}{Z_a}$$

$$\boxed{Z_b = Z_a \cdot \frac{Z_3}{Z_1}} \qquad (9)$$

$$\frac{⑤}{⑧} \Rightarrow \frac{Z_3}{Z_2} = \frac{Z_c}{Z_a} \Rightarrow \boxed{Z_c = Z_a \cdot \frac{Z_3}{Z_2}} \quad ⑩$$

Remplaçons Z_b et Z_c dans la relation ⑧

$$Z_2 = \frac{Z_a \cdot \frac{Z_3}{Z_1} \cdot Z_a}{Z_a + Z_a \cdot \frac{Z_3}{Z_1} + Z_a \frac{Z_3}{Z_2}} = \frac{Z_a \cdot \frac{Z_3}{Z_1}}{1 + \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_3}{Z_2}} \longrightarrow \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2} \times \dots \right.$$

$$Z_2 = \frac{Z_a \cdot \frac{Z_3}{\cancel{Z_1}} \cdot \cancel{Z_1} Z_2}{Z_1 Z_2 + \frac{Z_3}{\cancel{Z_1}} \cdot \cancel{Z_1} Z_2 + \frac{Z_3}{\cancel{Z_2}} \cdot Z_1 \cancel{Z_2}} = \frac{Z_a Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}$$

$$\boxed{Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}} \quad ⑪$$

$$\frac{⑦}{⑤} \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_a Z_c}{Z_b Z_c} = \frac{Z_a}{Z_b} \Rightarrow \boxed{Z_a = \frac{Z_1}{Z_3} Z_b}$$

$$\frac{⑦}{⑧} \rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_a Z_c}{Z_a Z_b} = \frac{Z_c}{Z_b} \Rightarrow \boxed{Z_c = Z_b \cdot \frac{Z_1}{Z_2}}$$

Remplaçons Z_a et Z_c dans la relation ⑧

$$Z_2 = \frac{\frac{Z_1}{Z_3} \cdot Z_b \cdot \cancel{Z_b}}{\frac{Z_1}{Z_3} \cdot \cancel{Z_b} + \cancel{Z_b} + \cancel{Z_b} \cdot \frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{Z_b \cdot \frac{Z_1}{Z_3}}{1 + \frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2}}.$$

multiplions par $Z_2 Z_3$

$$Z_2 = \frac{Z_b \cdot \frac{Z_1}{\cancel{Z_3}} \cdot Z_2 \cancel{Z_3}}{Z_2 Z_3 + \frac{Z_1}{\cancel{Z_3}} \cdot Z_2 \cancel{Z_3} + \frac{Z_1}{\cancel{Z_2}} \cdot \cancel{Z_2} Z_3} = \frac{Z_1 Z_2 Z_b}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

$$\boxed{Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1}} \quad ⑫$$

De la même manière on trouve :

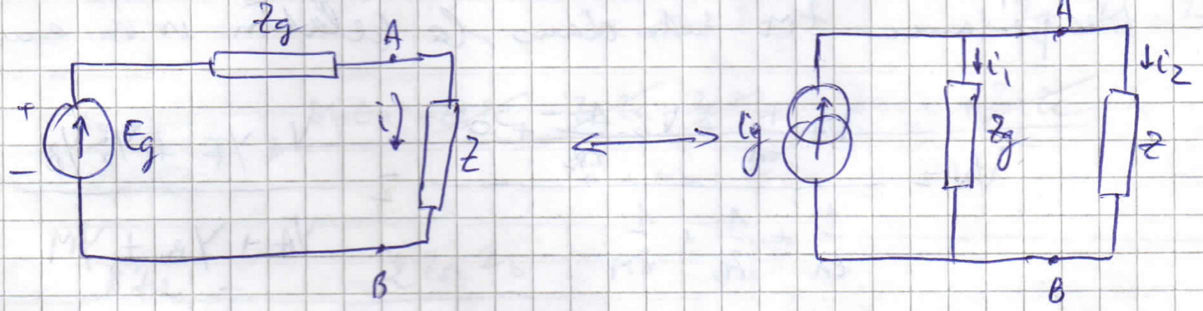
$$\boxed{Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}} \quad (13)$$

La Valeur de la résistance d'une branche d'1 Montage Δ est égale à la somme des produits des résistances prises 2 à 2 du montage $\curlywedge$, divisée par la résistance de la branche la plus éloignée du Montage $\curlywedge$.

6. Théorème de Millmann.

(*) Equivalence Thevenin $\longleftrightarrow$ Norton (générateur de tension et générateur de courant)

Deux générateurs sont équivalents s'ils débitent le même courant sous la même tension dans la même charge.

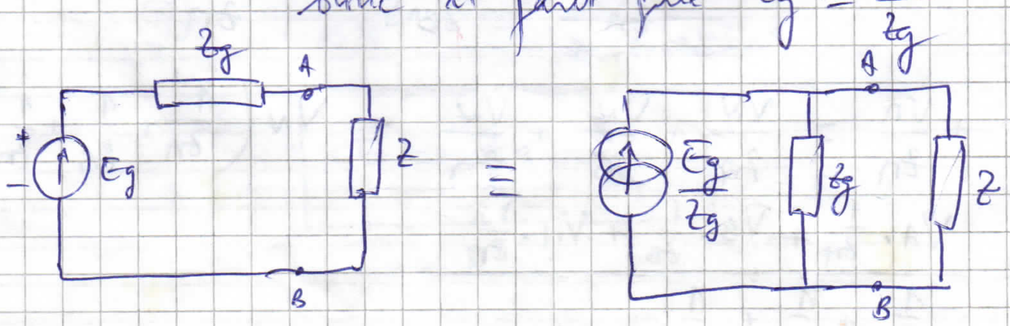


$i = \frac{E_g}{Z_g + Z}$ $\qquad$ $i_g = i_1 + i_2$ et on a $i_2 = \frac{Z_g}{Z_g + Z} i_g$

Les deux générateurs sont équivalents si $i = i_2$.

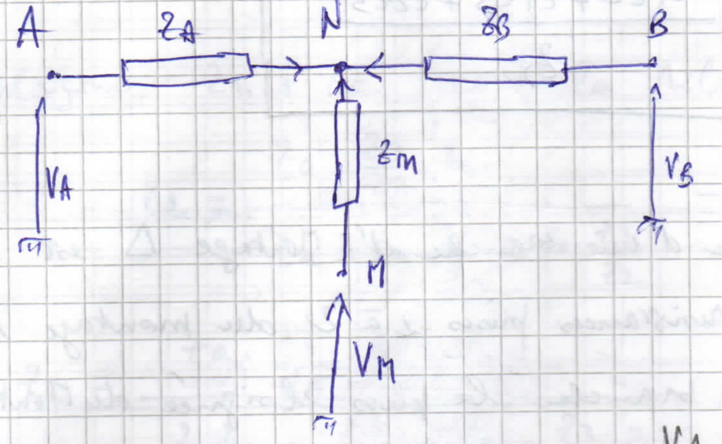
c.a.d. $\frac{E_g}{Z_g + Z} = \frac{Z_g}{Z_g + Z} i_g$ $\qquad$ c.a.d. si $E_g = Z_g\, i_g$

donc il faut que $i_g = \frac{E_g}{Z_g}$



6 - Théorème de MILLMANN

a) théorème relatif aux ~~[illegible]~~ Courant.



La tension au Noeud N

$$V_N = \frac{V_A \frac{1}{Z_A} + V_B \frac{1}{Z_B} + V_M \cdot \frac{1}{Z_M}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_M}}$$

$$V_N = \frac{V_A Y_A + V_B Y_B + V_M Y_M}{Y_A + Y_B + Y_M}$$

Si une des sources est nulle. (par ex. $V_M = 0$, M est mis à la Masse).

L'impédance Z_M reste dans la relation et on aura :

$$V_N = \frac{V_A \frac{1}{Z_A} + V_B \cdot \frac{1}{Z_B} + 0}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_M}} = \frac{V_A Y_A + V_B Y_B}{Y_A + Y_B + Y_M}$$

Demonstration :

$$V_N = V_A - Z_A I_A \Rightarrow I_A = \frac{V_A - V_N}{Z_A}$$

$$V_N = V_B - Z_B I_B \Rightarrow I_B = \frac{V_B - V_N}{Z_B}$$

$$V_N = V_M - Z_M I_M \Rightarrow I_M = \frac{V_M - V_N}{Z_M}$$

$$I_A + I_B + I_M = 0 \quad \frac{V_A - V_N}{Z_A} + \frac{V_B - V_N}{Z_B} + \frac{V_M - V_N}{Z_M} = 0$$

$$\frac{V_A}{Z_A} + \frac{V_B}{Z_B} + \frac{V_M}{Z_M} = \frac{V_N}{Z_A} + \frac{V_N}{Z_B} + \frac{V_N}{Z_M} = V_N \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_M} \right)$$

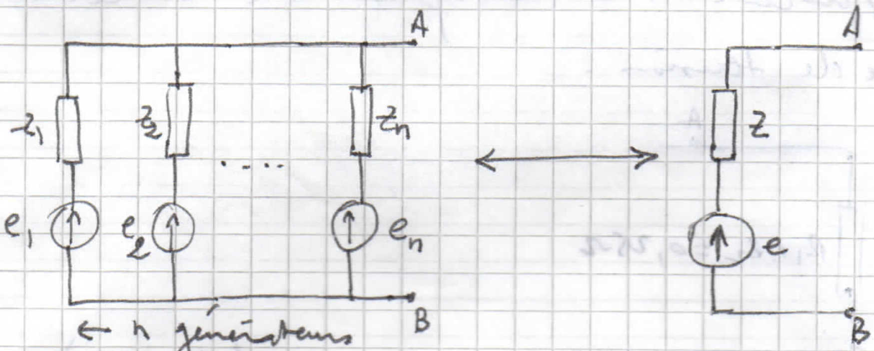
$$V_N = \frac{V_A \cdot \frac{1}{Z_A} + V_B \cdot \frac{1}{Z_B} + V_M \cdot \frac{1}{Z_M}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_M}}$$

b) Théoreme relatif aux generateurs de tension

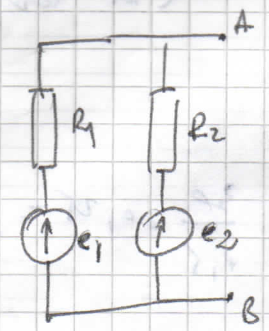
on Considère n générateurs de tension en parallèle, d'impédance interne Z_k et de f.e.m e_k. Cet ensemble peut être remplacé par un dipôle générateur unique :

– d'impédance interne : $Z = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k}}$

– de f.e.m $e = Z . \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k} . e_k$.



Ex.



$R_1 = R_2 = 0{,}5\,\Omega$

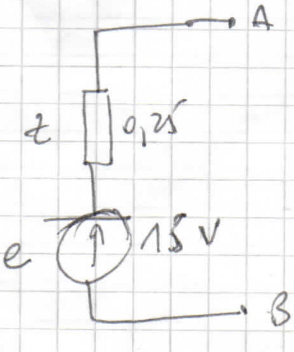
$e_1 = 20\,V$

$e_2 = 10\,V$

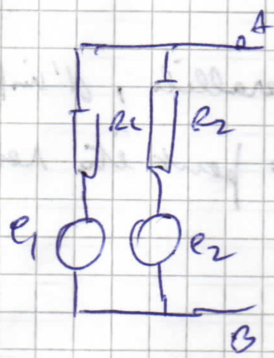
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}5}} = 0{,}25\,\Omega$$

$$e = Z . \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} \right) = 0{,}25 \left(\frac{20}{0{,}5} + \frac{10}{0{,}5} \right) = 0{,}25 (40 + 20)$$

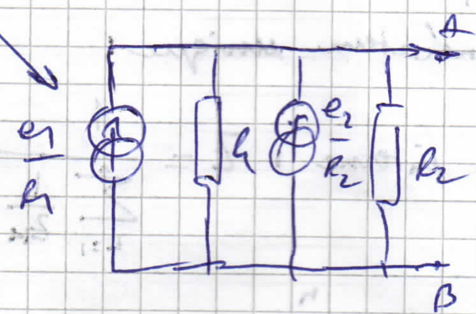
$e = 15\,V$

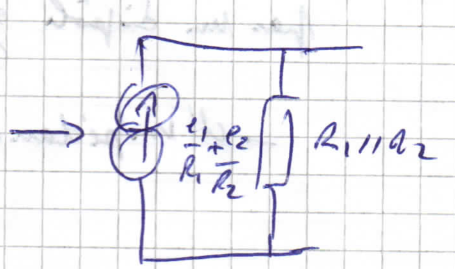


Autre Methode.

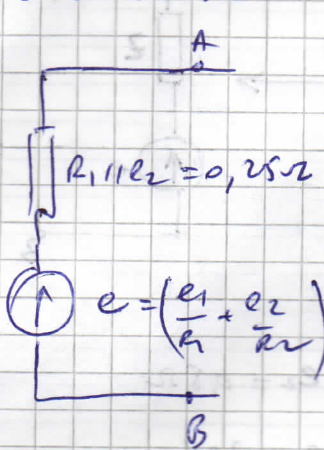


on fait une transformation
source de tension ⟶ source de courant



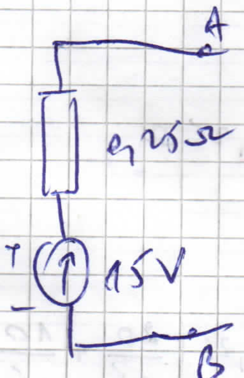


ensuite on procède à la transformation source de courant vers la source de tension.



$$e = \left(\frac{e_1}{R_1}+\frac{e_2}{R_2}\right)(R_1 // R_2) = 0,25\left(\frac{e_1}{R_1}+\frac{e_2}{R_2}\right)$$

$$e = 0,25\left(\frac{20}{0,5}+\frac{10}{0,5}\right) = \frac{30}{0,5}\cdot 0,25 = 15V$$



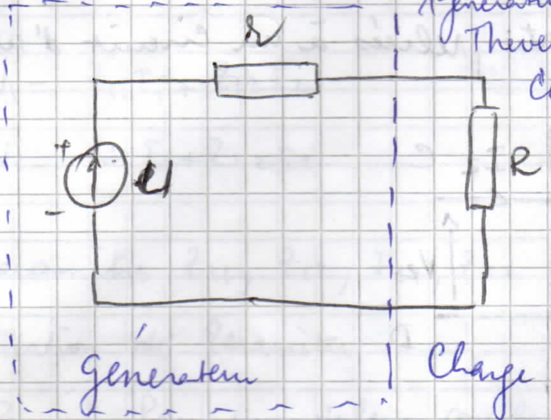
Comme $\frac{1}{Z_A} = Y_A$ donc

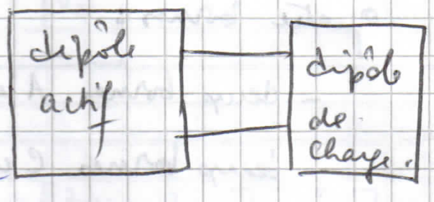
$$V_N = \frac{V_A Y_A + V_B Y_B + V_M Y_M}{Y_A + Y_B + Y_M}$$

(*) (*) 5bis

7 Adaptation d'impédance.

Soient 2 dipôles que l'on modélise par 1 générateur de Thevenin et une charge.





Soit P la puissance dissipée dans la charge R.

Pour quelle valeur de R et r, cette puissance est-elle maximale ?

on a $u = (r+R)I \Rightarrow I = \frac{u}{r+R}$

La puissance dissipée est : $P = RI^2 = \frac{Ru^2}{(r+R)^2}$

Si nous dérivons % à R on aura.

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\cancel{(r+R)}}{}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{u^2(r+R)^2 - 2(r+R)Ru^2}{(r+R)^4} = \frac{(r^2+R^2+2rR)u^2 - 2rRu^2 - 2R^2u^2}{(r+R)^4}$$

$$= \frac{r^2u^2 - R^2u^2}{(r+R)^4} = \frac{(r^2-R^2)u^2}{(r+R)^4} = \frac{(r-R)(r+R)}{(r+R)^4}u^2.$$

Cette dérivée s'annulle pour $r = R$; Conclusion :

|| La Puissance délivrée par un générateur est maximale quand ce générateur débite sur une charge égale à sa résistance interne.