— Exercice —

II. Interpolation (21 pts)

$$\text{soit} \qquad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

1. Déterminer le polynôme $P(x)$ de Lagrange basé sur les points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
   <5 pts>
2. Évaluer une borne supérieure de l'erreur d'iterpolation faite lorsqu'on utilise ce polynôme de Lagrange, calculé précedemment, pour interpoler en $x_0 = 0.5$, calculer et comparer cette borne supérieure d'erreur à l'erreur (d'interpolation) exacte.
   <8 pts>
3. Préciser si la méthode d'interpolation de Newton-Gregory est applicable dans notre exemple (justifier pourquoi) et si oui, si l'interpolation par cette méthode en $x_0 = 0.5$ serait identique à l'interpolation donnée précédente.
   <3 pts>
4. Donner, dans le cas de la formule de Newton-Gregory, une approximation de l'erreur en utilisant la règle du "prochain terme" (ou "next term rule") utilisant la table des différences utilisable lorsqu'on ne connait pas la fonction $f(x)$ (i.e., lorsqu'on connait uniquement les valeurs de cette fonction aux quatres points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$).
   <5 pts>

Réponse

1.

En utilisant donc le polynôme de collocation d'ordre deux qui passe par ces trois points, on a

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-1)(x+2)}{2} + \frac{x(x-2)}{-1} \times \frac{1}{2} + \frac{x(x-1)}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{(x-1)(x+2)}{2} - \frac{x(x-2)}{2} + \frac{x(x-1)}{6} \end{aligned}$$

<5 pts>

2.

Une borne supérieure de l'erreur d'interpolation est donnée par

$$\begin{aligned} \big|f(0.5) - P_2(0.5)\big| &< \left|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\right| \qquad n=2, \quad x=0.5, \quad \xi \in [0,2] \\ &< \left|\frac{(1/(1+\xi))'''}{3!}\,(0.5-0)\,(0.5-1)\,(0.5-2)\right| \\ &< \frac{1}{16}\cdot\left|\left(\frac{-1}{(1+\xi)^2}\right)''\right| \\ &< \frac{1}{16}\cdot\left|\left(\frac{2}{(1+\xi)^3}\right)'\right| \\ &< \frac{1}{16}\cdot\left|\left(\frac{-6}{(1+\xi)^4}\right)\right| \\ &< \frac{3}{8}\cdot\left|\left(\frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\right| \\ &< \frac{3}{8} = 0.375 \quad (\xi = 0) \end{aligned}$$

Une valeur interpolée pour $P(0.5)$ est donc estimée par

$$P(1/2) = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} - \frac{(1/2)(-3/2)}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{6} = (3/8) + (3/8) - (1/24) = 17/24$$

avec une erreur d'interpolation estimée à $|\Delta(P_2(0.5) - f(1/2))| \leq 0.375$
<8 pts>

Nota : On peut remarquer que dans ce cas précis, cela n'est pas une "bonne borne supérieure" d'erreur ou dans ce cas précis, c'est ce qu'on pourait appeller une borne d'erreur assez pessimiste (i.e., d'une utilité assez limitée) puisque, en réalité, l'erreur véritable est beaucoup plus faible dans ce cas $|P_2(0.5) - f(1/2)| = |17/24 - 2/3| = 1/24 \approx 0.04166$. La question 4. nous permettra d'avoir une approximation et non une borne supérieure mais qui sera beaucoup plus parlante et exploitable sans avoir besoin de calculer analytiquement une dérivée troisième.

3.

Oui, la méthode d'interpolation de Newton-Gregory est applicable car les points sont équidistants et ordonnés et la méthode de Newton-Gregory donnerait aussi la même valeur d'interpolation car le polynôme de Lagrange ou celui donné par la méthode de Newton Grégory est le polynôme de collocation qui est unique. <**3 pts**>

4.

En prenant donc ces trois points (équidistants et ordonnés), on doit donc calculer le tableau des différences qui s'écrit

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		-1/2		
1	1/2		1/3	
		-1/6		-1/4
2	1/3		1/12	
		-1/12		
3	1/4			

Une approximation de l'erreur $E(x = 0.5)$ est donnée par

$$|E(x = 0.5)| \approx \left| \frac{s(s-1)(s-2)}{6} (-1/4) \right|$$

avec le changement de variable $s = (0.5 - x_0)/h = (0.5 - 0.0)/1.0 = 0.5$. On obtient donc

$$|E(x = 0.5)| \approx \left| \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \right| = \frac{1}{64} \approx 0.015625$$

<**5 pts**>

Nota : Cela est, somme toute, une bonne aproximation (comparativement à la borne d'erreur obtenue précedement qui etait très pessimiste et) qui à été (de plus) obtenue facilement car elle nous a éviter de calculer analytiquement une dérivée troisième (cf. question 2.). De plus cette méthode, qui demande peu de calcul, peut s'implémenter facilement sur ordinateur.