II. Interpolation (20 pts)

1. Trouver, en utilisant la formule de Lagrange, une interpolation de $\sqrt{105}$ en utilisant la connaissance des points suivants

x_k	81	100	121
$y_k = \sqrt{x_k}$	9	10	11

<7 pts>

2. Trouver ensuite une borne supérieure de l'erreur d'interpolation associée à cette estimation et le nombre de cse correspondant à cette estimation.
<6 pts>

3. Trouver une approximation de $\sqrt{105}$ avec un developpement limité de la fonction $\sqrt{x}$ au voisinage de 100 au premier ordre. Donner une borne supérieure de cette estimation.
<7 pts>

Réponse

$\boxed{1.}$

En utilisant donc le polynôme de collocation d'ordre deux qui passe par ces trois points, on a

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-100)(x-121)}{(-19)(-40)} \times 9 + \frac{(x-81)(x-121)}{(19)(-21)} \times 10 + \frac{(x-81)(x-100)}{(40)(21)} \times 11 \\ &= (x-100)(x-121) \times 0.01184 + (x-81)(x-121) \times -0.02506 + (x-81)(x-100) \times 0.013095 \end{aligned}$$

<5 pts>

Une valeur interpolée pour $\sqrt{105}$ est (en gardant cinq chiffres après la virgule) donc estimée par

$$\begin{aligned} \sqrt{105} &\approx (5 \times -16 \times 0.01184) + (24 \times -16 \times -0.02506) + (24 \times 5 \times 0.01309) \\ &\approx -0.947368 + 9.62406 + 1.5714 \approx 10.24809 \end{aligned}$$

<2 pts>

$\boxed{2.}$

La dérivé de $x^{1/2}$ est $1/2\,x^{-1/2}$, sa dérivé seconde est $-1/4\,x^{-3/2}$ et sa dérivé troisième est $3/8x^{-5/2}$. Une borne supérieure de l'erreur d'interpolation est donc donnée par (cf. cours)

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{105} - P_2(105)\right| &< \left|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-81)(x-100)(x-121)\right| \qquad \xi \in [81,121] \\ &< \left|\frac{3/8\,\xi^{-5/2}}{3!}(24)(5)(-16)\right| \\ &< \left|\frac{3/8\,(81)^{-5/2}}{3!}(24)(5)(-16)\right| \\ &\lessapprox 0.0020 \end{aligned}$$

<5 pts>

On a $0.0020 < 0.5 \times 10^{-2}$ donc deux cse dans l'estimation de $\sqrt{105} \approx 10.\underline{248}$

<1 pt>

Nota : A comparer avec la vraie valeur $\sqrt{105} \approx 10.24695077$

$\boxed{3.}$

En utilisant un développement limité d'ordre un ($n = 1$) au voisinage de $a = 100$ pour trouver une approximation de la valeur de la fonction $f(x)$ en $x = 105$, on a (cf. cours)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x,a) \quad \text{avec} \quad R(x,a) = \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

C'est à dire numériquement

$$\begin{aligned} \sqrt{105} &= \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \times (105-100) + R(x=105, a=100) \\ &= 10.25 + R(x=105, a=100) \end{aligned}$$

<4 pts>

soit 10.25 comme approximation avec comme borne supérieure d'erreur de cette approximation linéaire

$$R(x=105, a=100) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi \in [81,121]$$

C'est à dire numériquement

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \quad (\text{avec} \quad \xi \in [81,121]) = \frac{(105-100)^2}{(2)!}(1/4)(81)^{-3/2} \approx 0.0043$$

<3 pts>