

## IV. Extrapolation de Richardson

Soit  $M$  une valeur inconnue et  $N(h)$  une approximation de cette valeur d'ordre  $O(h^2)$ .

1. Exprimer la signification de cette approximation.
2. Exprimer cette même approximation en fonction du terme d'erreur d'ordre  $O(h^3)$  et du terme  $Kh^2$  ou  $K$  est une constante indéterminée.
3. Exprimer cette dernière approximation pour un pas de largeur  $2h$ .
4. Éliminer  $K$  dans les deux dernières approximations et trouver une nouvelle approximation pour  $M$  avec un terme d'erreur d'ordre  $O(h^3)$ .
5. En déduire finalement la formule d'extrapolation de Richardson.

### Réponse

1. On peut écrire  $M$  de la façon suivante

$$M = N(h) + O(h^2)$$

2. De même, avec un terme d'erreur d'ordre  $O(h^3)$ , cette expression peut s'écrire, avec  $K$ , une constante indéterminée,

$$M = N(h) + Kh^2 + O(h^3) \quad (2)$$

3. Si on remplace  $h$  par  $2h$  dans cette expression, on trouve

$$M = N(2h) + 4Kh^2 + O((2h)^3) \quad (3)$$

4. En éliminant  $K$  dans les équations (2) et (3), on trouve

$$\begin{aligned} 3M &= 4N(h) - N(2h) + O(h^3) \\ M &= N(h) + \frac{1}{2^2 - 1} (N(h) - N(2h)) + O(h^3) \end{aligned}$$

5. On retrouve dans la dernière expression, la formule d'extrapolation de Richardson.