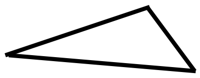
Série d'exercice N°1 : Rappels Mathématique

EXERCICE 1

Soit le triangle de la figure ci-contre, de sommets $a(0,2,0)$, $b(0,0,1)$ et $c(1,0,\ 0)$.

a) Trouver l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac}$.
b) Trouver un troisième vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac}$.
c) Déduire la surface du triangle abc.
d) Donner l'équation du plan passant par les points a, b et c.



EXERCICE 2

a) Donner le vecteur unitaire normal au plan $PL1$ défini par : $4x_1 + 4x_2 + x_3 = 4$.
b) Donner le vecteur unitaire normal au plan $PL2$ passant par les points : $a(0,0,2)$, $b(0,2,0)$ et $c(2,2,\ 0)$.
c) Déduire l'angle entre les deux plans $PL1$ et $PL2$.

EXERCICE 3

Montrer que la matrice A est le résultat d'une rotation de $\frac{\pi}{4}$autour de l'axe X_3suivie d'une rotation de $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe X_2.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

EXERCICE 4

On considère un système d'équations qui décrit la transformation de coordonnées $X(x_1, x_2,\ x_3)$ en $X'(x_1', x_2', x_3')$, tel que :

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 6x_3 \\ x_2' = 4x_2 \\ x_3' = 6x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

a) Ecrire le système d'équations sous forme matricielle.
b) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres normalisés de la matrice de transformation M.
c) Donner la matrice C qui diagonalise M.
d) Montrer que Cdécrit une rotation du repère de $\mp\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe X_2.

EXERCICE 5

Soient B un tenseur d'ordre 2 et V un tenseurs d'ordre 1 (vecteurs colonnes)définis dans le repère orthonormé $(oe_1e_2e_3)$par :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad V = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Montrer que $C = [B]\{V\}$ est un tenseur d'ordre 1.

EXERCICE 6

Soient les expressions indicielles suivantes :

1)u_iv_i ; 2) u_iv_j ; 3) $b_{ij}v_j$; 4) $b_{ij}v_i$; 5)$b_{ii}d_{jj}$; 6) $d_{kk}\delta_{ij}$; 7) $d_{kk}\delta_{ii}$

Ecrire les expressions ci-dessus sous forme :

a) Explicite ;
b) Matricielle.

EXERCICE 7

En utilisant la notation indicielle, montrer que :

a) $A^TA = I$, avec A matrice de rotation et$I$ matrice identité.
b) La norme d'un vecteur est indépendante de la rotation de repère.

EXERCICE 8

Soient U, V et W trois vecteurs. En utilisant l'identité $\varepsilon - \delta$, montrer que :

$$U \wedge (V \wedge W) = (U.W)V - (U.V)W$$

EXERCICE 9

Soit $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ un champ scalaire. Calculer la variation de Φ au point $M(1, 1, -4)$ dans la direction donnée par le vecteur $U = \langle 2 \quad 2 \quad 1 \rangle$ (commenter le résultat).

EXERCICE 10

Soit D un corps solide de volume V et de frontière S (figure ci-contre).

Montrer que :

$$\int_S x_i n_j \, dS = \delta_{ij} V$$