Université A/MIRA de Béjaia
Faculté : ST
Département :ST2

Année universitaire 2014-2015

Cours de Maths 5

Chapitre 1

rappels sur les nombres complexes :

1.1 Définition :

On appelle nombre complexe z toute expression de la forme

$$z = a + ib,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

On note ainsi

$$a = \mathrm{R}_e(z) \text{ (partie réelle de } z\text{)}, \quad b = \mathrm{I}_m(z) \text{ (partie imaginaire de } z\text{)}.$$

1.2 Remarque :

On adopte les deux règles suivantes :

$$(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a' \quad \text{et} \quad b = b')$$

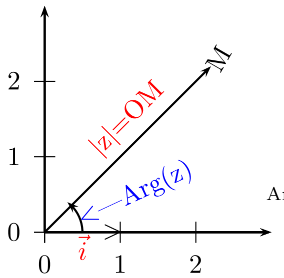
$$(a + ib = 0 = 0 + i0) \Leftrightarrow (a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0)$$

1.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Tout nombre complexe $z = a+ib$ peut être représenté sur le plan (Oxy) par un point $M(a, b)$, et réciproquement, tout point $M(a, b)$ peut être considéré comme l'image géométrique du nombre complexe $z = a + ib$.

Au sens géométrique,

$$\underbrace{|z|}_{\text{Module de } z} = \underbrace{OM}_{\text{distance entre O et M}}$$



$$\underbrace{Arg(z)}_{\text{Argument de } z} = \underbrace{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})}_{\text{l'ongle entre le vecteur } \overrightarrow{i} \text{ et le vecteur } \overrightarrow{OM}}$$

Remarque :

Pour des raisons de convenance, on assimile le nombre complexe $z = a + ib$ au vecteur $\overrightarrow{OM}$ correspondant.

Exemple 1 :

Calculer $|z|$ et $Arg(z)$ pour $z = -i + 1$, $z = -3i$, $z = 2i$.

Exemple 2 :

1) Écrire les expressions suivantes au sens géométrique.

$z = 2 + i$, $|z| \leq 3$, $|z - i| \leq 6$, $|z + i - 1| = |z - i + 2|$

2)Écrire les expressions suivantes au sens complexe.

$2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{0}$, $|OM|\overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{OM'}$.

3) transformer les ensembles suivants au sens complexe :

$\{M(x,y) \in (Oxy)$ tel que $OM \leq 1\}$, $\{M(x,y) \in (Oxy)$ tel que $OM < 1\}$, $\{M(x,y) \in (Oxy)$ tel que $1 \leq OM \leq 2$

Chapitre 2

Fonctions holomorphes-Intégrales curvilignes

2.1 Caractérisation des ensembles dans le plan-Appellations

2.1.1 Disques ouverts-Disques fermés :

Soit (Oxy) un plan.

On appelle disque ouvert de centre A et de rayon R, noté $D(A, R)$, l'ensemble :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } AM < R\}.$$

On appelle disque fermé de centre A et de rayon R, noté $\overline{D(A, R)}$, l'ensemble :

$$\{M(x, y) \in (Oxy) \text{ tel que } AM \leq R\}.$$

Exercice :

Transformer les ensembles $\overline{D(A, R)}$ et $D(A, R)$ au sens complexe.

2.1.2 Ensemble ouvert :

Soit E un ensemble de points dans le plan.

Au sens géométrique :

$$E \text{ est un ouvert } \Leftrightarrow \forall M \in E, \exists R > 0 \text{ vérifiant } D(M, R) \subset E.$$

Intuitivement, un ensemble ouvert contient tous les points de son intérieur mais ne contient pas les points de sa frontière (ou de ses frontières).

Au sens complexe :

$$E \text{ est un ouvert } \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \exists R > 0 \text{ vérifiant } D(z, R) \subset E.$$

Remarque :

Un ensemble fermé contient tous les points de son intérieur et de sa frontière.

2.1.3 Surfaces : connexes-simplement connexes :

Une surface plane est dite connexe si elle est faite d'un seul « morceau »

Une surface plane est dite simplement connexe si elle est connexe et "si elle n' a pas de trou"

2.2 Forme algébrique d'une Fonction à variable complexe :

2.2.1 Exemple :

Soit f la fonction à variable complexe z définie par $f(z) = z^2 - 2i\overline{z} + i$.

Ecrire $f(z)$ sous la forme algébrique.

On a $z = x+iy$ donc $z^2 = x^2-y^2+i2xy$, par conséquent $f(z) = \underbrace{(x^2 - y^2 + 2y)}_{\text{partie réelle de } f(z)} + i \underbrace{(2xy - 2x + 1)}_{\text{partie imaginaire de } f(z)}$

on pose :

$p(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$ et $q(x,y) = 2xy - 2x + 1$, l'expression $p(x,y) + iq(x,y)$ est appelée forme algébrique de la fonction $f(z)$.

2.3 Fonctions holomorphes :

$\boxed{\text{Holomorphe signifie dérivable au sens complexe.}}$

Soit f une fonction complexe à variable complexe et $z_0 \in \mathbb{C}$.

2.3.1 Définition :

$$\boxed{f \text{ holomorphe en } z_0 \Leftrightarrow \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = l \in \mathbb{C}, \quad (h \in \mathbb{C}).}$$

2.3.2 Remarque :

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$.

$$\boxed{f \text{ holomorphe sur } D \Leftrightarrow \text{ holomorphe en tout point de } D}$$

2.3.3 Exemple :

Dans chaque cas, étudier l'holomorphie de f en $z_0 = 0$.

1) $f(z) = z$, 2) $f(z) = \overline{z}$.

1)

$\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{z+h-z}{h} = 1$, la fonction $z \longmapsto f(z) = z$ est holomorphe en 0.

2)

$\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\overline{h}}{h}$.

Cette limite n'existe pas, par conséquent la fonction $z \longmapsto f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe en 0.

2.3.4 Proposition :

soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ un élément de U et $f = p + iq$ une fonction complexe définie sur U.

$$f \text{ holomorphe sur } U \Leftrightarrow \forall (x,y),\, x+iy \in U : \begin{cases} (a) : \text{les dérivées partielles de } p \text{ et } q \text{ existent et continues sur } U \\ \text{et} \\ (b) : \dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial q}{\partial y}(x,y) \\ \text{et} \\ (c) : \dfrac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Remarque :

Les deux égalités (b) et (c) sont appelées conditions de Cauchy.

2.4 Représentation paramétrique de quelques courbes :

2.4.1 Équation paramétrique d'un cercle :

Soit $C(M_0, R)$ le cercle de centre $M_0(x_0,\ y_0)$ et de rayon R. $C(M_0, R)$ est caractérisé comme suit :

$$C(M_0, R) = \left\{ M(x,\ y) \in (P) \text{ vérifiant } ||\overrightarrow{M_0M}|| = R \right\}$$

Au sens complexe, on écrit :

$$C(z_0, R) = \{ z = (x+iy) \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |z - z_0| = R \},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$ (l'affixe de M_0), $z = x + iy$ (l'affixe de M).

D'autre part, un nombre complexe $z - z_0$ s'écrit sous la forme complexe comme suit :

$$z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta},$$

Où $\theta = \mathbf{Arg}(z - z_0)$. Mais dans notre cas $z \in C(z_0, R)$, donc :

$$|z - z_0| = R \ \text{ et } \ \theta \in [0,\ 2\pi].$$

En plus, on a :

$$z - z_0 = |z - z_0|e^{i\theta} \Leftrightarrow z = z_0 + Re^{i\theta}$$

.

En fin :

$$C(z_0, R) = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } z = z_0 + Re^{i\theta},\ \theta \in [0,\ 2\pi]\right\}$$

.

L'équation $\boxed{z = z_0 + Re^{i\theta}, \quad \theta \in [0,\ 2\pi]}$ est appelée l'équation paramétrique (ou la représentation paramétrique) du cercle $C(M_0, R)$.

2.4.2 Équation paramétrique d'un segment de droite :

Considérons les deux ponts $A(x_0, y_0)$ et $A(x_1, y_1)$, le segment de droite $[AB]$ est caractérisé comme suit :

$$[AB] = \left\{M(x, y) \in (P) \ \text{ vérifiant } \ \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \ \text{ et } M \text{ entre } A \text{ et } B.\right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$[AB] = \left\{M(x, y) \in (P) \ \text{ vérifiant } \ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \ \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1.\right\}$$

Au sens complexe

$$[AB] = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ \text{ vérifiant } \ z - z_0 = t(z - z_1) \ \text{ et } t \text{ entre } 0 \text{ et } 1.\},$$

$z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_1 = x_1 + iy_1$.

L'expression $\boxed{z = z_0 + t(z_1 - z_0),\ t \in [0, 1]}$ est appelée la représentation paramétrique de $[AB]$ au sens complexe.

2.5 Intégrales curvilignes :

2.5.1 Intégrales curvilignes des fonctions à deux variables réelles :

Définition :

Soient $p(x,y)$, $q(x,y)$ deux fonctions et (C) une courbe plane (veut dire cette courbe se trouve dans le plan).

L'expression

$$\int_{(C)} p(x,y)dx + q(x,y)dy \qquad (1)$$

est appelée intégrale curviligne de $p(x,y)$ et $q(x,y)$ le long de la courbe (C) orientée dans le sens positif.

En physique, l'expression (1) signifie le travail accompli par la force $\vec{F}$ de composantes $p,\ q$ le long de la courbe (C).

Exemple :

Calculer le travail $W_{[OA]}$ accompli par la force $\overrightarrow{F}\left(x^2,\ xy\right)$ le long de la droite $[OA]$ orientée de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$.

Solution :

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2dx + xydy.$$

L'équation de la droite $[OA]$ est donnée par :

$$y = x$$

Cela veut dire

$$M(x,y) \in [OA] \Leftrightarrow y = x.$$

Par conséquent

$$dy = dx$$

.

Dans l'expression de l'intégrale ci-dessus nous allons mettre x au lieu de y, dx au lieu de dy.

$$W_{[OA]} = \int_{[OA]} x^2dx + xydy = \int_0^1 x^2dx + x^2dx = \frac{1}{3}$$

(Selon le sens indiqué x varie de 0 à 1).

Remarque :

Si on vous demande de calculer la même intégrale dans le sens contraire (de A à O), alors x varie de 1 à 0.

$$W_{[AO]} = \int_{[AO]} x^2dx + xydy = \int_1^0 x^2dx + x^2dx = -\frac{1}{3}.$$

2.5.2 Intégrales curvilignes des fonctions à variable complexe :

Soient f une fonction de variable complexe et (C) un chemin simple dans le plan. Au sens complexe l'expression

$$\int_{(C)} f(z)dz$$

est appelée intégrale curviligne de $f(z)$ le long du chemin (C) orienté dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre) .

Remarque :

généralement, lorsque le chemin (C) est fermé et orienté dans le sens positif, on note l'intégrale curviligne de $f(z)$ le long du chemin (C) par :

$$\oint_{(C)} f(z)dz$$

D'où vient l'appellation "intégrale curviligne" au sens complexe ?
(poser $f = p + iq$ puis remplacer dz par $dx + dy$, vous allez retrouver la formule d'intégrale curviligne donnée dans (8.1).)

Propriétés des intégrales curvilignes :

La notation (C) signifie le chemin orienté dans le sens positif, $(-C)$ signifie le chemin orienté dans le sens négatif.

Voici les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

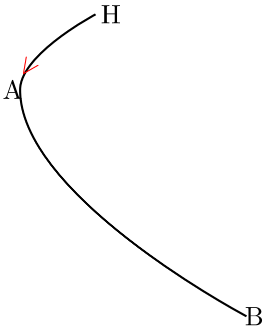
$$\int_{(C)} f(z)dz = -\int_{-(C)} f(z)dz$$

.

Propriété 2 :
On coupe le chemin (C) en deux chemins (C_1) et (C_2), dans le même sens on a :

$$(2) \quad \int_{(C)=(HB)} f(z)dz = \int_{(C_1=(HA))} f(z)dz + \int_{(C_2=(AB)} f(z)dz$$

Voir la figure 1.



Propriété 3 :

Soient U un ouvert non troué dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et z_0, z_1 deux points de U. Soit f une fonction holomorphe dans U sauf peut être aux points z_0 et z_1. (C) un chemin simple, fermé tracé dans U. z_0 et z_1 se trouvent à l'intérieur de (C). on a :

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C_0)} f(z)dz + \int_{(C_1)} f(z)dz,$$

Où (C_0), (C_1) deux cercles de centres z_0, z_1 et de rayons quelconques vérifiant :
$(C_0) \cap (C_1) = \varnothing$ et $(C_0), (C_1)$ se trouvent à l'intérieur de (C) (voir figure 2).
Une idée globale pour démontrer cette dernière propriété , en effet considérons le chemin (γ) orienté (voir la figure 2) définit comme suit :

$$(\gamma) = [AB] \cup (BE) \cup [EF] \cup (C_1) \cup [ST] \cup (TM) \cup [MN] \cup (MA).$$

Par conséquent,
$\int_{(\gamma)} fdz = \int_{[AB]} fdz + \int_{(BE)} fdz + \int_{[EF]} fdz + \int_{(C_1)} fdz + \int_{(TM)} fdz +$
$\int_{[ST]} fdz + \int_{[MN]} fdz + \int_{(MA)} fdz + \int_{(-C)} fdz \qquad (*).$
La fonction f est holomorphe sur (γ) et dans son intérieur, par conséquent $\int_{(\gamma)} fdz = 0$. la formule (*) devient :

$\int_{[AB]} + \int_{(BE)} + \int_{[EF]} + \int_{(C_1)} + \int_{(TM)} +$
$\int_{[ST]} + \int_{[MN]} + \int_{(MA)} = 0 \qquad (**).$

comme $\int_{[AB]} + \int_{[MN]} = 0$, $\int_{[EF]} + \int_{[ST]} = 0$ et $\int_{(BE)} + \int_{(TM)} = \int_{(C_0)}$, la formule $(**)$ revient sous cette forme :

$$\int_{(C_0)} fdz + \int_{(C_1)} fdz + \int_{(-C)} fdz = 0 \Leftrightarrow \int_{(C_0)} fdz + \int_{(C_1)} fdz = -\int_{(-C)} fdz$$

Comme $\int_{(C)} fdz = -\int_{(-C)} fdz$, on tire la propriété suivante :

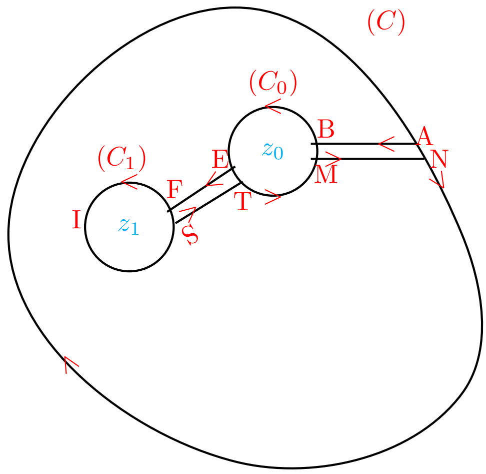
$$\boxed{\int_{(C)} fdz = \int_{(C_0)} fdz + \int_{(C_1)} fdz}$$

Remarque :

On peut généraliser cette propriété sur un nombre de points z_0, z_1,...,z_n, on a :

$$\boxed{\int_{(C)} f dz = \sum_{i=0}^{i=n} \int_{(C_i)} f dz}.$$

sans oublier que les cercles (C_i) $(i = 1,\ 2, .., \ n)$ de centres z_0, z_1,...,z_n sont deux à deux disjoints et tous se trouvent à l'intérieur de (C)



Exemple :

Calculer $\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz$, (C) le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 4.

Solution :

$$z \in (C) \Leftrightarrow z = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Par conséquent $dz = \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta$, l'intégrale en question devient :

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta$$

En fin

$$\int_{(C)} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i.$$

Proposition :

Soit (C) un chemin fermé simple, f une fonction holomorphe sur (C) et à l'intérieur de (C). On a :

$$\int_{(C)} f(z) dz = 0$$

Conséquence 1 :

Si f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe U, alors l'intégrale $\int f(z)dz$ ne dépend pas du chemin suivi.

c'est à dire :

Si $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_1 = x_1 + iy_1$ deux point fixés dans le plan complexe, alors pour tout chemin (G)(tracé à l'intérieur de U) joignant z_0 à z_1 on a :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int_{(G)} f(z)dz$$

2.5.3 Formules intégrales de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe U, (C) un chemin fermé tracé à l'intérieur de U, z_0 fixé dans (U). On a les deux formules suivantes :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) \ \text{ si } z_0 \ \text{ se trouve à l'interieur de } \ (C). \\ \\ 0 \ \text{ si } z_0 \ \text{ se trouve à l'exterieur de } \ (C). \end{cases}$$

D'une manière générale, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \ \text{ si } z_0 \ \text{ se trouve à l'interieur de } \ (C). \\ \\ 0 \ \text{ si } z_0 \ \text{ se trouve à l'exterieur de } \ (C). \end{cases}$$

Exemple :
Calculer $\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$ dans les cas suivants :

1)(C) : le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 0.5.

2)(C) : le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2.

Solution :

L'intégrale $\displaystyle\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz$ possède la forme $\displaystyle\int_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, $z_0 = i$.

Dans le cas (1), $z_0 = i = 0 + 1i$ se trouve à l'extérieur de (C) et la fonction $z \longmapsto \sin z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(C)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 0$$

Dans le cas (2), $z_0 = i = 0 + 1i$ se trouve à l'intérieur de (C) et la fonction $z \longmapsto \sin z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ la formule de Cauchy donne :

$$\int_{(g)} \frac{\sin z}{z - i} dz = 2\pi i \sin i$$

Chapitre 3

Séries de Laurent-Théorème des résidus

3.1 Séries de Laurent

3.1.1 Définition

Soit z_0 fixé dans $\mathbb{C}$, z une variable complexe.

On appelle série de Laurent autour de z_0 (ou suivant les puissances de $z-z_0$) toute expression de la forme

$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n(z-z_0)^{-n}}_{\text{série suivant les puissances de } z \text{ possitives}} \qquad + \qquad \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(z-z_0)^{n}}_{\text{série suivant les puissances de } z \text{ négatives}} \qquad .$$

Les nombres complexes a_0, a_1 ,... b_0, b_1,...sont appelés les coefficients de la série de Laurent.

Sous la forme explicite une série de Laurent autour de z_0 s'exprime ainsi :

$$... + a_2(z-z_0)^{-2} + a_1(z-z_0)^{-1} + b_0 + b_1(z-z_0)^1 + b_2(z-z_0)^2 + ...$$

Remarque et Appellation :

Une série de Laurent peut contenir un nombre fini ou infini de termes.

La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n(z-z_0)^{-n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(z-z_0)^{n}$ peut être remplacée par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^{n}$.

La partie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^{n}$ appelée partie analytique.

La partie $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(z-z_0)^{-n}$ appelée partie principale.

Exemple :

1) $\dfrac{1}{z}$ est une série de Laurent d'un seul terme z^{-1}, sa partie analytique est nulle, sa partie principale égale à z^{-1}

1) $2z^{-1} + 5z + 2z^2$ est une série de Laurent suivant les puissances de z, sa partie analytique égale à $5z + 2z^2$ et sa partie principale égale à $2z^{-1}$.

2) $-4(z-i)^{-3} + 5(z-i)^{-1} + 2 - 5i + 2(z-i)^2$ est une série de Laurent suivant les puissances de $z - i$, sa partie analytique égale à $2 - 5i + 2(z-i)^2$ et sa partie principale égale à $-4(z-i)^{-3} + 5(z-i)^{-1}$.

Activité 1 :

Ecrire l'expression "$z^2 + iz$" en série de Laurent suivant les puissances de $(z-2)$.

en effet, $z = (z-2) + 2$ par conséquent $z^2 + iz = [(z-2)+2]^2 + i[(z-2)+2]$, d'où :

$$z^2 + iz = (z-2)^2 + (4+i)(z-2) + 4 + 2i.$$

3.1.2 Représentation des fonctions en séries de Laurent

Activité 2 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + .. + z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

.

1) Exprimer S_n en fonction de n.

2) Trouver une condition sur z pour que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$ existe (c-à-d $\in \mathbb{C}$).

3) Exprimer $\dfrac{1}{1-z}$ à l'aide d'une série.

4) Considérons la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$. Exprimer cette fonction en série.

Solution :

Se rappeler la somme des termes d'une suite géométrique !

1)

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}, \quad \text{à condition} \quad z \neq 1$$

2)

Se rappeler $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x^n = 0$ si $|x| < 1$!

Ainsi, dans notre cas $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} z^n = 0 \;$ si $\; |z| < 1$.

Se rappeler $|z| < 1$ signifie le disque ouvert de centre $O(0,0)$ et de rayon 1 !

Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \frac{1}{1-z}} \quad (1)$$

Mais, explicitement, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$ signifie $1 + z + z^2 + z^3 + .. + z^n + ...$

L'expression (1) peut s'écrire sous cette manière

$$\boxed{\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } 1 + z + z^2 + .. + z^n + ... = \frac{1}{1-z}} \quad (2)$$

3)

A travers de la formule (2), on dit que la fonction $\dfrac{1}{1-z}$ est développable autour de $z_0 = 0$ dans le disque ouvert de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

Autrement dit, l'expression $\dfrac{1}{1-z}$ peut être remplacée par la série $1 + z + z^2 + .. + z^n + ...$ sous la condition $|z| < 1$.

4)

A quelle condition peut-on exprimer $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$ en série de Laurent ?
Nous allons reprendre la formule (2)

$$\forall z \text{ vérifiant } |z| < 1 \text{ on a } \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + .. + z^n + ...$$

En divisant les deux membres de cette dernière formule par z^3, on obtient :

$$\forall z \text{ vérifiant } (|z| < 1 \text{ et } z \neq 0) \text{ on a } \frac{1}{(1-z)z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + .. + z^n + ... \quad (3)$$

L'expression ($|z| < 1$ et $z \neq 0$) peut être remplacée par $0 < |z| < 1$, la formule (3) devient :

$$\forall z \text{ vérifiant } (0 < |z| < 1) \text{ on a } \frac{1}{(1-z)z^3} = z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + .. + z^n + ... \quad (4)$$

De la formule (4), on dit que $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$ est développable en série de Laurent autour de zéro (0).

Autrement dit, la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$ peut être remplacée par

$z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + .. + z^n + ...$ sous la condition $0 < |z| < 1$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que une fonction de variable complexe soit développable en série de Laurent

Théorème 3-1 :

Considérons le disque ouvert pointé $D = \{z \text{ vérifiant } 0 < |z - z_0| < R\}$, $(R \leq +\infty)$.
Si f est une fonction à variable complexe holomorphe dans le disque ouvert pointé D, alors elle est développable en série de Laurent suivant les puissances de $|z - z_0|$ dans le disque D.

Autrement dit, si vous prenez z dans D alors $f(z)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$f(z) = ... + a_2(z - z_0)^{-2} + a_1(z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1(z - z_0)^1 + b_2(z - z_0)^2 + ...$$

3.2 Résidus

Définition :

Sous les conditions du Théorème 3-1, On appelle résidus de la fonction f au point z_0 et on note $Res(f, z_0)$ le coefficient de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement de Laurent

$$... + a_2(z - z_0)^{-2} + \underbrace{a_1}_{Res(f,z_0)} (z - z_0)^{-1} + b_0 + b_1(z - z_0)^1 + b_2(z - z_0)^2 + ...$$

Théorème des résidus dans un cas simple :

soit f une fonction holomorphe dans le disque ouvert $D(O, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(R \in \mathbb{R}_+^*)$ sauf peut être aux points singuliers z_0, z_1,..., z_n. (C) un chemin fermé régulier tracé dans D.

Si les points singuliers z_0, z_1,..., z_n se trouvent à l'intérieur de (C), alors

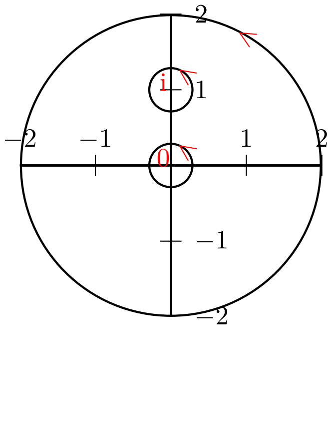
$$\int_{(C)} f(z)dz = 2\pi i \left(Res(f, z_0) + Res(f, z_1) + .. + Res(f, z_n) \right).$$

Exemple :

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{(C)} \frac{e^z}{z^2(z - i)} dz$, (C) le cercle d'équation $|z| = 2$ orienté dans le sens positif. La fonction sous le signe intégrale n'est pas définie aux points i et 0, ces derniers sont appelés points singuliers. comme i et 0 se trouvent à l'intérieur du cercle (voir la figure ci-dessous), on a :

$$\int_{(C)} \frac{e^z}{z^2(z - i)} dz = 2\pi i (Res(f, 0) + Res(f, i))$$

<u>calculons Res(f, 0)</u> :



Afin de calculer $\text{Res}(f,0)$, on exprime d'abord $f(z)$ en série de Laurent autour de 0 (ou bien suivant les puissances de z). pour ce faire :

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2}.\frac{1}{z-i}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + ...$$

En divisant les deux membres de cette dernière expression par z^2, on obtient :

$$\frac{e^z}{z^2} = z^{-2} + z^{-1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + ..., \qquad (z \in \mathbb{C}^*)$$

Ainsi, le développement en série de Taylor autour de 0 de $\frac{1}{z-i}$ est donné comme suit :

$$\frac{1}{z-i} = i + z - iz^2 + ..., \quad (z \neq i)$$

En fin pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et$z \neq i$ on a :

$$f(z) = (z^{-2} + z^{-1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + ...)(i + z - iz^2 + ...)$$

Dans ce produit nous allons intéresser uniquement au terme de la forme az^{-1}. Ce qui donne alors :

$$f(z) = (1+i)z^{-1} + ...$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{Res}(f,0) = 1+i}.$$

<u>Calculons $\text{Res}(f,i)$</u>

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2}.\frac{1}{z-i}$$

Nous allons exprimer $f(z)$ en série de Laurent autour de i(ou bien suivant les puissances de $(z-i)$), en effet :

Le développement en série de Taylor autour de i pour $h(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ donne :

$$h(z) = h(i) + h'(i)(z-i) + \frac{h''(i)}{2!}(z-i)^2 + \frac{h'''(i)}{3!}(z-i)^3 + ..., (z \neq 0)$$

Par conséquent

$$f(z) = \frac{h(z)}{z-i} = h(i)(z-i)^{-1} + h'(i) + \frac{h''(i)}{2!}(z-i) + \frac{h'''(i)}{3!}(z-i)^2 + .., (z \neq 0).$$

donc

$$\boxed{\text{Res}(f,i) = \text{coefficient de } \ (z-i)^{-1} = h(i) = \frac{e^i}{i^2} = -e^i}$$

En résumé

$$\int_{(C)} \frac{e^z}{z^2(z-i)}dz = 2\pi i(Res(f,0) + Res(f,i)) = 2\pi i(1 + i - e^i).$$