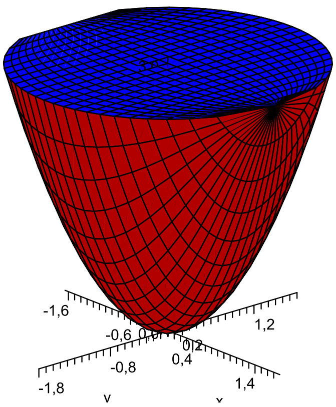
Excercice 1 :

Calculer le volume du corps (D) limité par le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et la surface plane d'équation $z = 3$.

Solution

Voici le corps (D) :



Le domaine (D) est régulier(c-à-d il est limité exactement par deux surfaces d'équations $z = 3$ (la surface plane) et $z = x^2 + y^2$ (la surface paraboloïde). Dans ce cas les bornes de la variable z sont : 3 et $x^2 + y^2$.
On note par V le volume du corps (D)

$$V = \iiint_{(D)} dxdydz = \iint_H \left[\int_{x^2+y^2}^{3} dz \right] dxdy,$$

Où H la projection de (D) sur le plan (oxy). Évidement, H est un disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

$$V = \iint_H \left(3 - (x^2+y^2)\right) dxdy = 3\iint_H dxdy - \iint_H \left(x^2+y^2\right) dxdy$$
$$= 3\text{Aire}(H) - \iint_H \left(x^2+y^2\right) dxdy.$$

$Aire(H) = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$, reste à calculer $\iint_H \left(x^2+y^2\right) dxdy.$

Afin de calculer cette intégrale, on utilise les coordonnées polaires, en posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

On obtient,

$$\iint_H \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_H \left(r^2\right) rdrd\theta.$$

On exprime le domaine H en coordonnées polaires :

$$H = \left\{(r,\theta) \ \text{ vérifiant } \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \text{ et } \ 0 \leq r \leq \sqrt{3}\right\}.$$

Par conséquent,

$$\iint_H \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_H \left(r^3\right) drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr\right] d\theta.$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} d\theta$$
$$= \frac{18\pi}{4}.$$

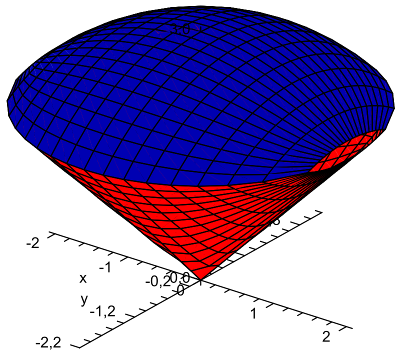
Revenons maintenant à l'expression de V :

$$V = 9\pi - \frac{18\pi}{4} = \frac{9\pi}{2} \text{ (unité de volume).}$$

Exercice 2 :

Calculer le volume du corps limité par la surface du cone d'équation $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et la surface sphérique (la partie supérieure) définie par l'équation $x^2+y^2+z^2 = 9$.

Solution



La surface sphérique (en bleu) est définie par l'équation $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, la surface du cone (en rouge) est définie par $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. On note par D la figure ci-dessus.

$$\begin{aligned} Volume(D) &= \iiint_D dxdydz = \iint_H \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dz \right] dxdy \\ &= \iint_H \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy, \end{aligned}$$

(Où H la projection de D sur le plan (OXY)).

Il est claire que H est un disque de centre $O(0, 0)$ et de rayon $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

(il suffit de résoudre l'équation $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.)

Afin de calculer l'intégrale ci-dessus, on utilise les coordonnées polaires, en posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

$$\iint_H \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy = \iint_H \left(\sqrt{9 - r^2} - \sqrt{r^2} \right) rdrd\theta\ .$$

Ce qui donne :

$$\text{Volume } (D) = \iint_H \left(\sqrt{9 - r^2} - \sqrt{r^2} \right) rdrd\theta = \iint_H r \left(\sqrt{9 - r^2} \right) drd\theta - \iint_H r^2 drd\theta.$$

Le domaine H, en coordonnées polaires, se caractérise ainsi

$$H = \left\{ (r, \theta) \ \text{ vérifiant } \ 0 \le \theta \le 2\pi \ \text{ et } \ 0 \le r \le \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{Volume }(D) = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r\sqrt{9-r^2}dr\right]d\theta - \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^2dr\right]d\theta$$

D'une part on a, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^2dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{9}{2\sqrt{2}}d\theta = \frac{9\pi}{\sqrt{2}}$.

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r\sqrt{9-r^2}dr$ nous allons revenir aux cours première année sur les intégrales simples. On pose $r = 3\sin t$. Comme r varie de 0 à $\frac{3}{\sqrt{2}}$, la nouvelle va -riable t varie de 0 à $\dfrac{\pi}{4}$ et $dr = 3\cos t dt$.

$$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r\sqrt{9-r^2}dr = 27\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cos^2 t dt = -27\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)^2 d\cos t.$$

(Remarquer que $d\cos t = -\sin t dt$).

$$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r\sqrt{9-r^2}dr = -27\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)^2 d\cos t = \frac{(\cos t)^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -27\left(\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{1}{3}\right).$$

En fin :

$$\begin{aligned}\text{Volume }(D) &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r\sqrt{9-r^2}dr\right]d\theta - \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^2dr\right]d\theta \\ &= -54\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{1}{3}\right) - \frac{9\pi}{\sqrt{2}}\text{(unité de volume).}\end{aligned}$$

De