Université de Béjaia
Faculté des sciences de la nature et de la vie
Département des TCSN
Première année LMD

2015-2016

Examen de mathématiques (semestre 1)

Durée : 2 Heures

Exercice n°1(04.5pts)

Soit $g(x) = x\sqrt{x}$:

1°/ Donner le domaine de définition de g.

2°/ Étudier la dérivabilité de g.

3°/ Soit $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

a/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

b/ Étudier la dérivabilité de f.

Exercice n°2(05.5pts)

1°/ Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = a + \frac{be^x}{1+e^x} + \frac{ce^x}{(1+e^x)^2}$$

Puis calculer

$$\int \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$$

2°/ Calculer : $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^3}dx$ et $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$

Exercice n°3(05pts)

Une urne contient 2 boules blanches et 4 noires.

1°/ On tire simultanément 4 boules de l'urne, calculer la probabilité de l'évenement A :"obtenir une seule boule blanche".

2°/ On tire 4 boules successivement et sans remise. Calculer $P(A)$; Calculer la probabilité des évenements B :"n'obtenir aucune boule blanche" ; C :"obtenir au moins une boule blanche".

3°/ On tire 4 boules successivement et avec remise. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

Exercice n°4 : Application du cours(05pts)

Sur une autoroute où la vitesse est limité à $80km/h$, un radar a mesuré la vitesse de tous les véhicules pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillis soient distribuées selon une loi normale avec une moyenne de $72km/h$ et un écart-type de $8km/h$;

1°/ Quelle est la proportion (pourcentage) de conducteur qui devront payer une amende (contravention) pour excès de vitesse ?

2°/ Sachant qu'en plus de l'amende, un excès de plus de $30km/h$ implique un retrait de permis de conduire, quelle est la proportion des conducteurs qui vont se faire retirer le permis parmi ceux qui vont avoir une amende ?

Intégrale $F(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad F(-t) = 1 - F(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Utilisation

On lit les décimales dans les lignes, et les centièmes en colonnes.
Par exemple, la valeur de $F(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05
- on trouve $F(1.65) = 0.9505$, à 10^{-4} près. Pour les valeurs négatives de t, on utilise la relation $F(-t) = 1 - F(t)$.

Corrigé examen de mathématiques (2015-2016)

Exo n° 1.

1°/ $D_g = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. (0,5)

2°/ Sur $\mathbb{R}_+^*$ g est dérivable car c'est le produit de deux f^{cts} dérivables sur à savoir $x \longmapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$. (01)

$x \longmapsto \sqrt{x}$ " " $\mathbb{R}_+^*$

$x_0 = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 = g'_d$ (0,5)

3°/ $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

a/ $D_f = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, 1 - x^2 \geq 0\} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow D_f = [-1, 1]$. (0,5)

b/ Sur $]-1, 1[$: f est dérivable car c'est le produit de deux f^{cts} dérivables sur D_f à savoir (0,5)

$x \longmapsto 1-x$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ composée de deux f^{cts} dérivables sur $]-1, 1[$

Au p^t $x = 1$; $f(1) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{-(x-1)\sqrt{1-x^2}}{(x-1)} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} -\sqrt{1-x^2} = 0$$ (0,5)

Donc f est dérivable à gauche du p^t $x = 1$ et $f'_g(1) = 0$

Au p^t $x = -1$; $f(-1) = 0$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{x+1} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty$$ (01)

donc f n'est pas dérivable à droite du p^t $x = -1$

conclusion f est dérivable sur $]-1, 1]$ (0,5)

Exo n°2

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = a + b\,\frac{e^x}{(1+e^x)} + c\,\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{a(1+e^x)^2 + be^x(1+e^x) + ce^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{a(1+2e^x+e^{2x}) + be^x + be^{2x} + ce^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(a+b)e^{2x} + (2a+b+c)e^x + a}{(1+e^x)^2}$$

Par identification : $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$ 1,5

alors : $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ 0,5

1/

$$\int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C,\quad C\in\mathbb{R}$$ 1

2/ $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^3}\,dx$

On pose $t = 1+e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx$. 0,5

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^3}\,dx = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(1+e^x)^2} + C,\quad C\in\mathbb{R}$$ 0,5

$\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}\,dx$.

Ipp : $u = x \Rightarrow du = dx$. 0,5

$v = -\frac{1}{2(1+e^x)^2} \Leftarrow dv = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}\,dx$ (calculé plus haut)

$$\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}\,dx = \frac{-x}{2(1+e^x)^2} + \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$$ 0,5

0,5

$$= -\frac{x}{2(1+e^x)^2} + \frac{1}{2}\left[x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}\right] + C,\quad C\in\mathbb{R}$$

Exo n°3.

1/ simultanément ⇒ combinaisons

$$P(A) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}} = \frac{C_2^1 C_4^3}{C_6^4} = \frac{8}{15} = 0,533$$ 1

successivement et sans remise

2/ $P(A) = \frac{4 \times A_2^1 A_4^3}{A_6^4} = \frac{192}{360} = \frac{8}{15} = 0,533$ [ex. BNNN ou NBNN ou NNBN ou NNNB]. 1

$P(B) = \frac{A_4^4}{A_6^4} = \frac{1}{15} = 0,066$ 0,5

$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15} = 0,933$ 0,5

3°/ successivement avec remise

$P(A) = \frac{4.2^1 4^3}{6^4} = \frac{32}{81} = 0,39$ 1

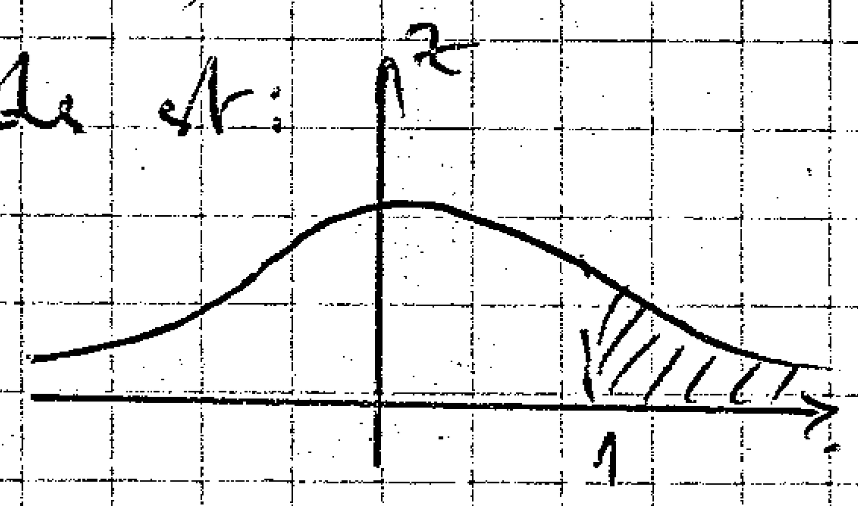
$P(B) = \frac{4^4}{6^4} = \frac{16}{81} = 0,197 \simeq 0,20$ 0,5

$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} = 0,80$ 0,5

Exo n°4

X v.a continue est la mesure de la vitesse. $X \leadsto N(72, 8)$ 0,5

1- Le pourcentage des conducteurs qui recevront une amende est:



$P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80-72}{8}\right) = P(Z > 1)$ 0,5

$= 1 - F(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$ 1

d'où 15,87%. (du tableau avec $Z \leadsto N(0,1)$) 0,5

2- On cherche la proba conditionnelle de mesurer une vitesse supérieure à 110 km/h (110 = 80+30) km/h en sachant que le conducteur est déjà passible d'une amende. 0,5

$$P(X>110 / X>80) = \frac{P(X>110 \cap X>80)}{P(X>80)} = \frac{P(X>110)}{P(X>80)}$$

$$= \frac{P\left(Z > \frac{110-72}{8}\right)}{0,1587} = \frac{P(Z>4,75)}{0,1587} = \frac{1-F(4,75)}{0,1587} = \frac{1-1}{0,1587} = 0$$

la proba est presque nulle.

2