2. Incertitudes et calcul d'erreurs

a. Les différents types d'erreurs

Pour qu'il soit valorisé, tout résultat expérimental doit être suivi d'une estimation sur l'ordre de grandeur de l'erreur globale que l'on a pu commettre. On peut distinguer deux types d'erreurs :

- **Erreurs systématiques :** elles sont dues à une cause bien déterminée et se produisent dans un même sens qui n'est pas toujours connu. Elles sont répétitives et constantes. Les erreurs systématiques doivent être traquées et éliminées.

Exemple : l'utilisation d'une règle dont il manque le premier centimètre : toutes les mesures seraient surévaluées ou si une balance indique déjà quelques grammes lorsque le plateau n'est pas chargé, toutes les mesures fourniront une valeur trop élevée.

- **Erreurs aléatoires :** elles sont mal définies, varient dans le temps et se produisent de part et d'autre de la valeur vraie. Les erreurs aléatoires ne peuvent pas être éliminées mais on peut les limiter. Il faut donc savoir les évaluer.

Exemple : la mesure de la longueur d'un objet par une règle ; l'erreur aléatoire est inévitable liée à l'ajustement de la règle sur l'objet, à la vision de l'expérimentateur et à la précision de la règle. La valeur mesurée peut être surévaluée ou sous-évaluée et une répétition des mesures puisse atténuer l'erreur aléatoire.

b. Expression d'erreurs

L'erreur peut être exprimée sous forme de :

- **Erreur absolue :** c'est la valeur absolue de l'écart entre la valeur vraie (X_v) et la valeur mesurée (X_m). La valeur vraie (X_v) étant inconnue, l'erreur absolue l'est également.

Erreur absolue = $|X_v\text{-}X_m|$ = inconnue

L'incertitude absolue (ΔX) est la limite supérieure de l'erreur absolue :

Incertitude absolue = limite supérieure de l'erreur absolue = ΔX

- **Erreur relative :** c'est le rapport de l'erreur absolue à la valeur mesurée. Elle n'est pas connue.

$$Erreur\ relative = \frac{Erreur\ absolue}{Valeur\ mesurée} = \frac{|Xv - Xm|}{Xm} = Inconnue$$

L'incertitude relative est le quotient de l'incertitude absolue ΔX par la valeur mesurée Xm.

$$Incertitude\ relative = limite\ sup.de\ l'erreur\ relative = \frac{Incertitude\ absolue}{Valeur\ mesurée} = \frac{\Delta X}{Xm}$$

Elle nous donne la précision de la mesure et s'exprime par le rapport : $\varepsilon(\%)=\frac{\Delta X}{X}.100$

Exemple : soit Xm=1,523428 (valeur mesurée) et ΔX =3.10^{-4} (incertitude absolue = limite supérieure de l'erreur absolue)

- ✓ *L'erreur absolue = |Xv-Xm| = inconnue car Xv est inconnue*
- ✓ *On peut dire que la valeur vraie Xv est entre 1,523428-3.10^{-4} = 1,523728 et 1,5234**28**+3.10^{-4} = 1,523128 et on écrit : $X_v = X_m \pm \Delta X$ =1,5234**28**±0,0003*
- ✓ *L'erreur relative = $\frac{|Xv-Xm|}{Xm}$=inconnu*
- ✓ *L'incertitude relative =* $\frac{\Delta X}{X_m} = \frac{3.10^{-4}}{1{,}523428} * 100 = 0{,}02\% \Longrightarrow X_v = 1{,}523428 \pm 0{,}02\%$
- ✓ *On peut transformer l'incertitude absolue en incertitude relative et vis-versa :* $0{,}02\% * 1{,}523428 = 0{,}0003 \Longrightarrow 1{,}523428 \pm 0{,}02\% \equiv 1{,}523428 \pm 3.10^{-4}$

c. Origine des erreurs

Les erreurs sont dues généralement à l'appareil de mesure et à l'expérimentateur. On distingue :

- *Erreurs de consommation :* ce sont des erreurs systématiques dues à la consommation de l'appareil de mesure.

Exemple : introduction de l'appareil de mesure dans des circuits électriques.

- *Erreurs de lecture* : sont la différence entre la valeur indiquée par l'appareil et celle lue par l'expérimentateur.

Exemple : pour une burette graduée, l'intervalle qui sépare deux traits consécutifs correspond à un volume de 1/20mL.

- ✓ *L'erreur absolue de lecture d'un volume à la burette est donc de 0,05mL.*
- ✓ *Si* $V_m = 3mL \Longrightarrow V_v = 3 \pm 0{,}05mL$

- *Erreurs instrumentales :* sont des erreurs systématiques dues au manque de fidélité de l'appareil. Un appareil de mesure est fidèle lorsque les résultats qu'il donne sont reproductibles.

  L'erreur instrumentale est donnée par : $\Delta X = \frac{Classe * Calibre}{100}$

  avec : le calibre est la grandeur de la valeur à mesurer qui donne sur le cadran la déviation maximale de l'aiguille. La classe-est le rapport du maximum de l'erreur tolérée sur le calibre de l'appareil. Donc lorsqu'on change de calibre l'erreur maximale change aussi puisque la classe ne dépend pas du calibre utilisé. La classe est toujours donnée par le constructeur.

Exemple : Lorsqu'un voltmètre de classe 0,5 est utilisé sur le calibre de 100Volts, l'erreur instrumentale est :$\Delta V = \frac{0,5*100}{100} = 0,5Volt$

La valeur 0,5 Volts est l'erreur absolue maximale (incertitude absolue) que l'on peut commettre avec un appareil de cette classe et utilisé sur ce calibre. Cette erreur est la même quelle que soit la déviation de l'aiguille, par contre l'erreur relative varie :

Si $U = 1Volts \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta U}{U} = \frac{0,5}{1} = 0,5 = 50\%$

Si $U = 50Volts \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta U}{U} = \frac{0,5}{50} = 0,01 = 1\%$

d. Calcul d'incertitude

__1 er cas :__ Lorsque la grandeur G est mesurée directement à l'aide d'un appareil de mesure. Dans ce cas, l'erreur globale est minimale commise est l'incertitude de la mesure. Elle est égale à :

$$|\Delta G| = |\Delta G|_s + |\Delta G|_l + |\Delta G|_i$$

Avec : $|\Delta G|_s$ est l'erreur systématique, $|\Delta G|_l$ est l'erreur de lecture et $|\Delta G|_i$ est l'erreur instrumentale.

Exemple : La mesure avec une burette est de 80 graduations sur 100 graduations.

- *Quelle est le volume mesuré lorsque la burette est de 10mL?*
- *Quelles sont les incertitudes absolue et relative de cette mesure ?*
- *Si la graduation lue par le lecteur est n=79, quelle est l'erreur de lecture commise ?*
- *Calculer l'erreur globale commise lors de cette mesure?*

Corrigé :

- *80 graduations sur l'échelle N=100 graduations.*

Le volume est 100 graduations → 10mL

80 graduations → V

Alors V= 8mL

- *Incertitude absolue : ΔV = 0,2/20=0,01mL*
- *Incertitude relative : ε (%) = (ΔV/V)x100 =1/8 =0,125%*
- *La valeur lue est: 100 graduations → 10mL*
  79 graduations → V'
  Alors V'= 7,9mL
  L'erreur de lecture est ΔV= 8-7,9 = 0,1mL
- *L'erreur globale est: ΔV = $|\Delta Vs|$ + $|\Delta Vl|$ = 0,01+0,1 =0,11mL*

<u>2</u>

__2ème cas :__ lorsque la grandeur G est déduite de la mesure et des valeurs connues d'autres grandeurs X, Y et Z à partir d'une relation de forme : G = G (X, Y, Z)

L'incertitude absolue s'écrit à l'aide d'une expression analogue à celle de la différentielle totale de G = G (X, Y, Z).

On à :

$$G=G(X,Y,Z)\Rightarrow dG=\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z}dX+\left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z}dY+\left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y}dZ$$

$$\Rightarrow|\Delta G|=\left|\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z}\right||\Delta X|+\left|\left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z}\right||\Delta Y|+\left|\left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y}\right||\Delta Z|$$

Une autre méthode de calcul pratique permet de d'estimer ces incertitudes (relatives et absolues), il s'agit de la différentielle de la fonction logarithmique $d(lnG) = \frac{dG}{G}$

Exemple : Soient deux (02) résistances R_1 et R_2 respectivement 10Ω et 100Ω montées en parallèle. Elles sont mesurées avec une précision de 1%. Calculer la résistance équivalente R, ΔR et $\frac{\Delta R}{R}$?

Corrigé :

1. *La résistance équivalente R :*

Les résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Longrightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

Application numérique :

$$\left.\begin{matrix} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \end{matrix}\right\} \Longrightarrow R = \frac{10*100}{10+100} \Longrightarrow R = 9{,}09\Omega$$

2. *L'incertitude absolue ΔR et l'incertitude relative $\frac{\Delta R}{R}$:*

- ✓ *La méthode de la différentielle totale* $\left(\Delta R \longrightarrow \frac{\Delta R}{R}\right)$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Longrightarrow dR = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right) dR_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right) dR_2$$

avec : $\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right) = \frac{R_2(R_1+R_2)-(R_1R_2)}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}$; $\left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right) = \frac{R_1(R_1+R_2)-(R_1R_2)}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}$

$$\Rightarrow dR = \left(\frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\right) dR_1 + \left(\frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}\right) dR_2 \Rightarrow \Delta R = \left|\frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\right| |\Delta R_1| + \left|\frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}\right| |\Delta R_2|$$

Où : $\frac{\Delta R_1}{R_1} = 1\% \Rightarrow \frac{\Delta R_1}{R_1} = 0{,}01 \Rightarrow \Delta R_1 = 0{,}01 * R_1$; $\frac{\Delta R_2}{R_2} = 1\% \Rightarrow \frac{\Delta R_2}{R_2} = 0{,}01 \Rightarrow \Delta R_2 = 0{,}01 * R_2$;

Application numérique :

$$\left.\begin{array}{c} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \\ R = 9{,}09\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta R_1 = 0{,}01 * R_1 \Rightarrow \Delta R_1 = 0{,}01 * 10 \Rightarrow \Delta R_1 = 0{,}1\Omega \\ \Delta R_2 = 0{,}01 * R_2 \Rightarrow \Delta R_2 = 0{,}01 * 100 \Rightarrow \Delta R_2 = 1\Omega \\ \Delta R = \left(\frac{(100)^2}{(10+100)^2}\right) * 0{,}1 + \left(\frac{(10)^2}{(10+100)^2}\right) * 1 \Rightarrow \Delta R = 0{,}09\Omega \\ \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}09}{9{,}09} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}09}{9{,}09} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = 0{,}01 = 1\% \end{cases}$$

- ✓ *La méthode de la différentielle de la fonction logarithmique* $\left(\frac{\Delta R}{R} \longrightarrow \Delta R\right)$

$$ln(R) = ln\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right) \Rightarrow ln(R) = ln(R_1R_2) - ln(R_1+R_2) \Rightarrow ln(R) = ln(R_1) + ln(R_2) - ln(R_1+R_2)$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{d(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)} \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} + \frac{-dR_1}{(R_1+R_2)} + \frac{-dR_2}{(R_1+R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right) dR_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right) dR_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right| |\Delta R_1| + \left|\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right| |\Delta R_2|$$

Application numérique :

$$\left.\begin{array}{c} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \\ R = 9{,}09\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta R}{R} = \left|\frac{1}{10} - \frac{1}{(10+100)}\right| * |0{,}1| + \left|\frac{1}{100} - \frac{1}{(10+100)}\right| * |1| \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = 0{,}01 = 1\% \\ \frac{\Delta R}{R} = 0{,}01 \Rightarrow \Delta R = 0{,}01 * R \Rightarrow \Delta R = 0{,}01 * 9{,}09 \Rightarrow \Delta R = 0{,}09\Omega \end{cases}$$

<u>3</u>

$3^{ème}$ *cas :* lorsque les erreurs sont aléatoires (erreurs de sensibilité, erreurs de fidélité, …) on utilise la méthode statistique en répétant (n) fois la même mesure de la grandeur X et on prend la moyenne :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Et chaque mesure s'écarte de la valeur moyenne $\overline{X}$ d'une quantité $\Delta X_i = X_i - \overline{X}$. On peut prendre alors comme erreur l'écart moyen $\overline{\Delta X}$ défini par :

$$\overline{\Delta X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|X_i - \overline{X}\right|}{n}$$

Et l'intervalle $\left[\overline{X} - \overline{\Delta X}, \overline{X} + \overline{\Delta X}\right]$ s'appelle l'intervalle de confiance de la mesure.

$\overline{X} - \overline{\Delta X}$ $\overline{X}$ $\overline{X} + \overline{\Delta X}$

Intervalle de confiance

Exemple : Pour manque de fidélité de notre ampèremètre, on répète 5 fois la mesure de l'intensité du courant électrique (en mA) qui traverse une résistance R. Les résultats obtenus sont : 101,00 ; 102,30 ; 99,80 ; 100,90 ; 98,50.

- *Calculer* $\bar{I}$ *: Par définition de la moyenne :* $\bar{i} = \dfrac{\sum_{a=1}^{5} i_a}{5}$

Application numérique : $\bar{i} = \dfrac{101{,}00 + 102{,}30 + 99{,}80 + 100{,}90 + 98{,}50}{5} \Rightarrow \bar{i} = 100{,}50\,mA$

2- Calculer $\overline{\Delta I}$ *: Par définition de l'écart moyen :* $\overline{\Delta i} = \dfrac{\sum_{a=1}^{5} \left| i_a - \bar{i} \right|}{5}$

Application numérique :

$$\overline{\Delta i} = \frac{|101{,}00 - 100{,}5| + |102{,}30 - 100{,}5| + |99{,}80 - 100{,}5| + |100{,}90 - 100{,}5| + |98{,}50 - 100{,}5|}{5}$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta i} = 1{,}08\,mA$$

3- Déterminer l'intervalle de confiance de cette mesure : Par définition de l'intervalle de confiance : $\left[\bar{i} - \overline{\Delta i}, \bar{i} + \overline{\Delta i}\right]$

Application numérique : $\left[\bar{i} - \overline{\Delta i}, \bar{i} + \overline{\Delta i}\right] \equiv [100{,}5 - 1{,}08; 100{,}5 + 1{,}08] \equiv [99{,}42; 101{,}58]$