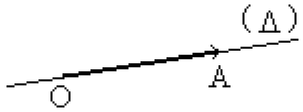
3. Les vecteurs

a. Définitions

Un *vecteur* $\overrightarrow{OA}$ est un segment de droite orienté. Il est caractérisé par :

- Une direction : celle de la droite (Δ) qui le porte ;
- Un sens : celui qui se dirige de O vers A ;
- Un point d'application : son origine au point O ;
- Une extrémité : sa fin au point A ;
- Un module : la longueur du segment [OA]. Soit $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$, donc le module de $\overrightarrow{OA}$ est $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Un *vecteur libre* est un vecteur qui se déplace librement dans l'espace en gardant la direction, le sens et son module.

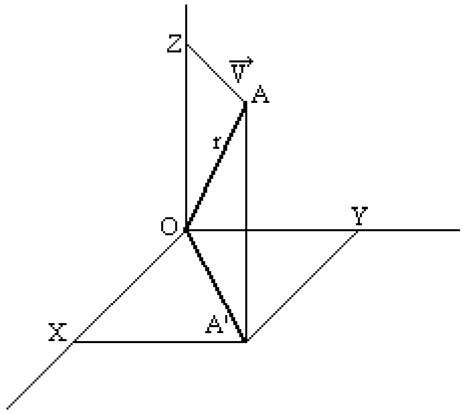
Un *vecteur unitaire* est un vecteur qui a pour module l'unité, soit $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = unité$.

b. Coordonnées d'un vecteur

Soit une base orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On construit le vecteur $\overrightarrow{OA} = \vec{V}$.

Soient :

- $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = unité$ modules des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, perpendiculaires entre eux et portés respectivement sur les axes Ox, Oy et Oz ;
- $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \left\|\vec{V}\right\| = r$: longueur du segment [OA] ;
- $\overrightarrow{OA'}$: la projection de $\overrightarrow{OA}$ sur le plan (xOy) et le module de $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \rho$;
- $X\,\vec{i}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Ox, $Y\,\vec{j}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Oy et $Z\,\vec{k}$ est la projection de $\overrightarrow{OA}$ sur l'axe Oz ;
- ϕ est l'angle formé entre $\overrightarrow{OA}$ et l'axe Oz et θ est l'angle formé entre $\overrightarrow{OA'}$ et l'axe Ox.



Le vecteur $\vec{V}$ peut être écrit sous forme d'une somme vectorielle des trois (03) vecteurs.
Avec : X = ρ cos θ = r sin ϕ cos θ, Y = ρ sin θ = r sin ϕ sin θ et Z = r cos ϕ.
Le vecteur $\vec{V}$ peut être défini par les coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) dont les vecteurs unitaires sont $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$.

c. Propriétés des vecteurs

Soit une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les vecteurs $\overrightarrow{V_1}(x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{V_2}(x_2, y_2, z_2)$ ont les propriétés suivantes :

- $\overrightarrow{V_1}(x_1,y_1,z_1)=\overrightarrow{V_2}(x_2,y_2,z_2)$ si les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ ont le même module, le même sens (lignes parallèles) et la même direction.
- $\overrightarrow{V_1}(x_1,y_1,z_1)+\overrightarrow{V_2}(x_2,y_2,z_2)=\overrightarrow{V_2}(x_2,y_2,z_2)+\overrightarrow{V_1}(x_1,y_1,z_1)=\vec{S}(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ ou graphiquement.
- $-\overrightarrow{V_1}(x_1,y_1,z_1)=\overrightarrow{V_1}(-x_1,-y_1,-z_1)$
- $\overrightarrow{V_1}(x_1,y_1,z_1)-\overrightarrow{V_2}(x_2,y_2,z_2)=\vec{D}(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$
- $\lambda\overrightarrow{V_1}(x_1,y_1,z_1)=\overrightarrow{V_1}(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) avec \lambda \in R$

d. Operations sur les vecteurs :

❖ **Produit scalaire de deux vecteurs**

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}(x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{V_2}(x_2, y_2, z_2)$ est un ***scalaire*** ayant les propriétés suivantes :

- Notation : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$
- Valeur : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=\|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.\cos(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$
- Expression analytique :
  $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}).(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Donc, selon le signe de l'angle (θ) formé entre les deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, le produit scalaire peut être :

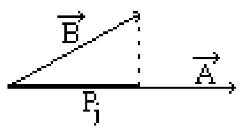
* si $\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=1 \Rightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=\|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|$: positif.

* si $\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=0$: nul.

* si $\theta=\pi \Rightarrow \cos\theta=-1 \Rightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=-\|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|$: négatif.

Projection d'un vecteur sur un autre : soit P_j la projection du vecteur $\vec{B}$ sur le vecteur $\vec{A}$.

On a : $\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos(\vec{A},\vec{B})$ et puisque : $\cos(\vec{A},\vec{B})=\frac{P_j}{\|\vec{B}\|}$ donc : $P_j=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|}$



❖ **Produit vectoriel de deux vecteurs**

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un ***vecteur*** $\vec{C}$ ayant les propriétés suivantes :

- Notation : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$;
- Direction : perpendiculairement à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ simultanément ;
- Module : $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\sin(\vec{A}, \vec{B})$;
- Sens : déterminé par la règle de tire- bouchon ;
- Signification : représente la surface de parallélogramme construit sur la base des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Expression analytique :

$$\vec{A} \Lambda \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \vec{\imath}.\begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix} - \vec{\jmath}.\begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix} + \vec{k}.\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$$

$$= (y_A.z_B - y_B.z_A).\vec{\imath} - (x_A.z_B - x_B.z_A).\vec{\jmath} + (x_A.y_B - x_B.y_A).\vec{k}$$

❖ **Produit mixte de trois vecteurs**

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V_1}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{V_2}(x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{V_3}(x_3, y_3, z_3)$ est un ***scalaire*** défini par :

$$\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|.\|\vec{V_2}\|.\cos(\vec{V_1}, \vec{V_2} \wedge \vec{V_3}).\sin(\vec{V_2}, \vec{V_3})$$

Le produit mixte peut être exprimé aussi sous forme d'un déterminant :

$$\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2$$

Signification : la valeur $|\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})|$ représente le volume du parallélépipède construit sur la base des vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$

e. Opérateurs vectoriels

L'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ (Nabla) est une grandeur vectorielle qui indique comment une grandeur physique varie en fonction de ses différents paramètres. $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

❖ **Gradient d'une fonction**

Soit une fonction à trois (03) variables $F(x, y, z)$. Le gradient de la fonction *F* est défini par :

$$\overrightarrow{grad}\ F = \vec{\nabla}.F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

Le gradient d'une fonction est un vecteur.

Le gradient caractérise une variation, orientée dans l'espace, d'une grandeur physique. Cette fonction peut représenter, par exemple, la température à chaque point dans une pièce. La valeur de T dépend de la position du point. On cherche maintenant un vecteur qui pointe vers l'augmentation maximale de T dans la pièce à partir de la source de la propagation de la température.

- **Divergence d'un vecteur**

Soit un vecteur $\vec{V}\left(A_x, A_y, A_z\right)$. La divergence de $\vec{V}$ est définie par :

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

La divergence d'un champ vectoriel peut être interprétée comme suit : soit un comme champ vectoriel la vitesse d'un gaz réel (compressible), la divergence de ce champ peut être interprétée comme une mesure de l'accroissement de la matière en un point donné. Ce phénomène se traduit par le fait que toutes les vitesses sont localement dirigées vers ce point. Lorsqu'un champ converge (les directions des vecteurs convergent), la divergence est négative.

- **Rotationnel d'un vecteur**

Soit un vecteur $\vec{V}\left(A_x, A_y, A_z\right)$. Le rotationnel de $\vec{V}$ est définie par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur.

Le rotationnel est un opérateur permettant de mesurer localement un tourbillonnement. On l'applique généralement à un vecteur.

- **Le Laplacien**

Soit une fonction à trois (03) variables $F(x, y, z)$. Le laplacien de la fonction F est défini par :

$$\Delta F = div.\overrightarrow{grad}\ F = \nabla^2.F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Le laplacien d'une fonction est un scalaire.

Cas particulier :

* $\overrightarrow{rot}.\overrightarrow{grad}F = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}F = \vec{0}$

* $div.\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$