Corrigé de la Série 5 (derniers exercices)

Exercice 03 :

1/ La probabilité de guérir un malade est p=0.9 (succès) et donc q=1-p=0.1 (échec).

C'est une Bernoulli qui se répète N=1000 fois donc il s'agit d'une Binômiale B(N,p)=B(1000,0.1) (les expériences sont indépendants) Alors la probabilité de guérir k malade sur 1000 est donnée par :

$$\mathrm{P(X = k)} = C_{1000}^{K}.p^{k}.q^{1000-k}$$

C'est-à-dire :

$$\mathrm{P(X = k)} = C_{1000}^{K}.0.1^{k}.0.9^{1000-k}$$

2/ Le nombre moyen de malades guéris est $m = n.p = 1000 \times 0.9 = 900$ malades.

3/ $m > 5$ et $N > 50$ et (p n'étant pas proche de 1 automatiquement q non proche de 0),

on approche la B(1000, 0.9) par une gaussienne de moyenne $m = 900$ et écart-type

$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{1000 \times 0.9 \times 0.1} = 9.48$ malades.

Exercice 04 :

Il s'agit de la loi de Poisson puisque p=0.001 (proche de zéro) automatiquement q=1-p=0.999 est proche de 1 et $m = n.p = 2000 \times 0.001 = 2 < 5$

Loi de Poisson : $P(X = k) = e^{-m}.\frac{m^k}{k!}$ $(m = \lambda)$

1/ $P(X = 3) = e^{-2}.\frac{2^3}{3!} = 0.18045$ (à lire du tableau).

2/ $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$

$$= 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.32332$$

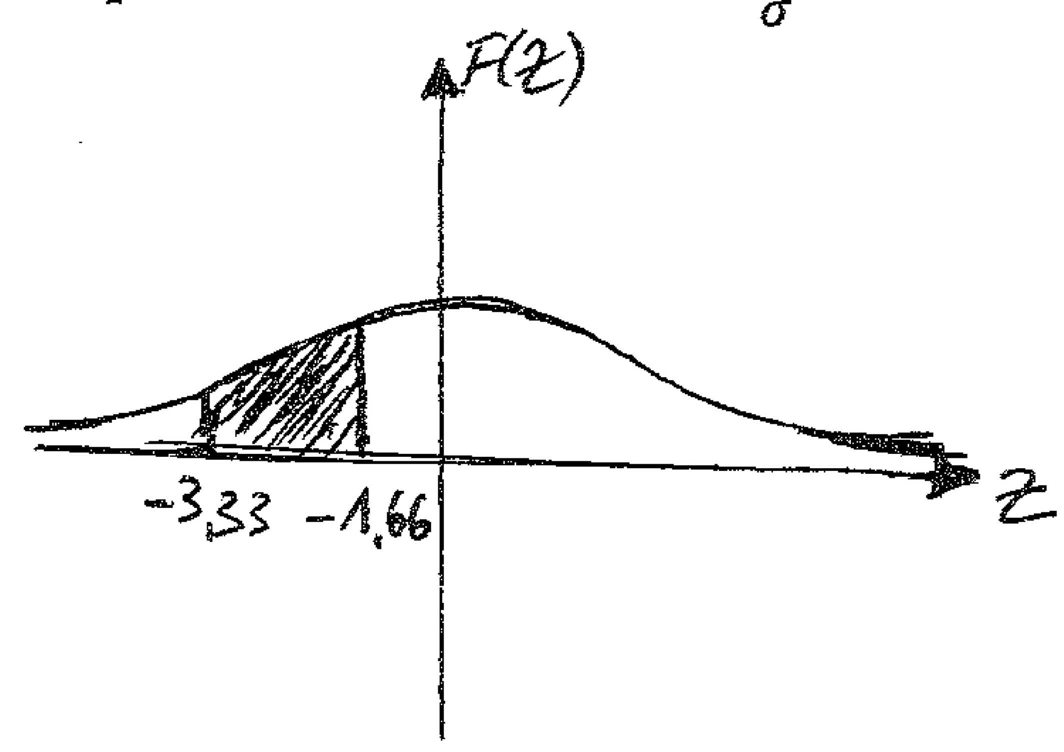
Exercice 05 :

Remarque : utiliser le tableau de la loi normale réduite.

1/ Calculons la variable aléatoire centrée réduite équivalente Z où $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Pour $X_1 = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{0-20}{6} = -3.33$

Pour $X_2 = 10 \rightarrow Z_2 = \frac{10-20}{6} = -1.66$



Alors :

a) Le pourcentage des faibles consommateurs est donné par :

$$P(0 \leq X \leq 10) = P(-3.33 \leq Z \leq -1.66) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3.33}^{-1.66} e^{\frac{Z^2}{2}} dz$$

$$= F(-1.66) - F(-3.33)$$

$$= [1 - F(1.66)] - [1 - F(3.33)] = F(3.33) - F(1.66)$$

<u>D'après le tableau :</u>

F(3.33)=0.9996 (décimale 3.3 et centième 0.03)

F(1.66)=0.9515 (décimale 1.6 et centième 0.06)

Donc :

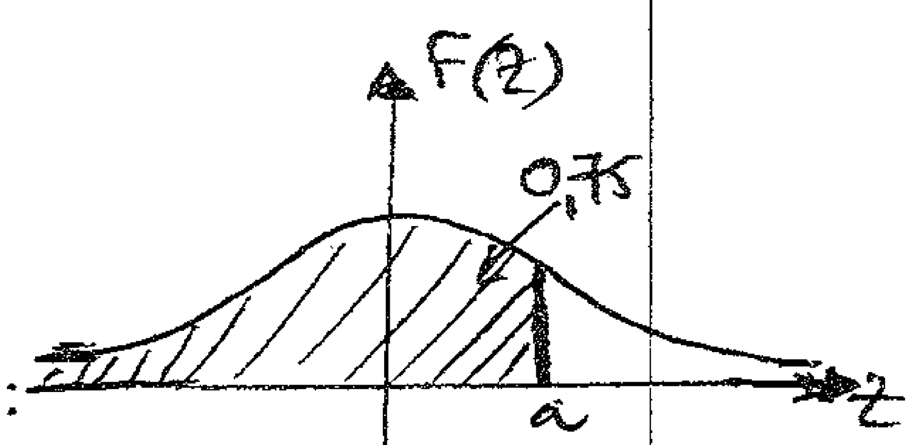
$$P(0 \leq X \leq 10) = 0.9996 - 0.9515 = 0.0481\ (4.81\%)$$

b) Le pourcentage des grands consommateurs est donné par :

$$P(30 \leq X \leq 40) = P\left(\frac{30-20}{6} \leq Z \leq \frac{40-20}{6}\right) = P(1.66 \leq\ Z \leq 3.33)$$

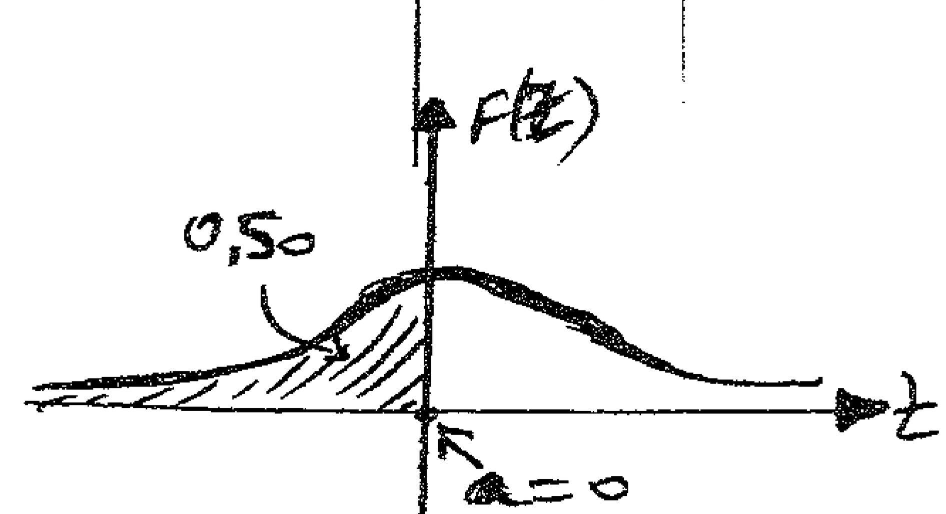
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.66}^{3.33} e^{\frac{Z^2}{2}} dz = F(3.33) - F(1.66)$ = 0.9996-0.9515=0.0481 (4.81%)

2/ On cherche a tel que $P(Z \leq a) = 0.75$ (c'est presque 0.7486 dans le tableau).on lira que $a \approx 0.67$ (0.6 et 0.07).



Comme $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ donc $X = \sigma Z + \mu = 6 \times 0.67 + 20 = 24.02\ L$

3/ 50 % correspond à (tableau toujours) $P(Z \leq a) = 0.50$: a=0 et donc :



$X = \sigma Z + \mu = \mu = 20\ L$ (C'est la moyenne)

4/ On cherche a tel que : $P(Z \leq a) = 0.33$

$a = -0.6293$ (est négatif) (la partie négative)

D'où : $X = \sigma Z + \mu = -6 \times 0.6293 + 20 = 16.22\ L$