de cette grandeur ;

- le passage des différentielles aux incertitudes absolues

$$\frac{\Delta G}{|G|} = A\Delta x + B\cdot\Delta y + C\cdot\Delta z \qquad \Delta x>0\ ;\ \Delta y>0,\ \Delta z>0$$

Exercice :

Pour mesurer la masse volumique d'un liquide, nous avons mesuré sa masse et son volume. Les résultats obtenus sont $m_v = (199 \mp 0{,}1)\ g$; $V = (25{,}2 \mp 0{,}2)$

- Calculer la masse volumique (ρ_m) mesurée de ce liquide.
- Calculer les incertitudes absolue $(\Delta\rho)$ et relative $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_m}\right)$ en utilisant les deux méthodes. Comparer entre les résultats obtenus.
- Donner l'intervalle de confiance de la mesure (ρ_V).
- Comparer entre la précision de mesure de (ρ_V) et celle exprimée par l'expression : $\rho_V = (790 \mp 1)\ kg.m^{-3}$ sur la bouteille de ce liquide.

Réponse :

- Calcul de la masse volumique (ρ) du liquide :

$$\rho_m = \frac{m_m}{V_m} = \frac{199 \times 10^{-3}\ kg}{25{,}2\times 10^{-6}\ m^3}$$

$$\rho_m = 789{,}7\ kg/m^3$$

- Calcul des incertitudes absolue $(\Delta\rho)$ et relative $\frac{\Delta\rho}{\rho_m}$:

→ Méthode de la différentielle totale :

$$\rho = \frac{m}{V} \longrightarrow \text{relation physique}$$

$$d\rho = \left.\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|_{V=cte} dm + \left.\frac{\partial\rho}{\partial V}\right|_{m=cte} \cdot dV$$

$$d\rho = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m}{V}\right)\cdot dm + \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{m}{V}\right)\cdot dV$$

$$d\rho = \left(\frac{1}{V}\right) dm + \left(\frac{-m}{V^2}\right) dV$$

Donc : $\Delta\rho = \left|\frac{1}{V}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{-m}{V^2}\right| \Delta V.$

A.N : $\Delta\rho = \left|\frac{1}{25{,}2\times10^{-6}}\right| \cdot 0{,}1\times10^{-3} + \left|\frac{-199{,}9\times10^{-3}}{(25{,}2\times10^{-6})^2}\right| \cdot (0{,}2\times10^{-6})$

$\Delta\rho = 3{,}97 + 6{,}27 = 10{,}24 \ kg/m^3$ * $\rho_v = 790$; $\Delta\rho = 10$

Donc : $\rho_v = (789{,}7 \mp 10{,}24) = (790 \mp 10) \ kg/m^3$.

$\frac{\Delta\rho}{\rho_m} = \frac{10{,}24}{789{,}7} = 0{,}012$

$\frac{\Delta\rho}{\rho_m} = 0{,}0129 \times 100 = 1{,}29\% \simeq 1{,}3\%$

(Chaque 100 kg/m^3 mesurée, il y a une incertitude absolue de 1,2 kg/m^3 de plus ou de moins commise dans la mesure de (ρ)).

→ Méthode ② = Différentielle de la fonct° logarithmique

$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow \ln\rho = \ln\left(\frac{m}{V}\right)$

$\ln\rho = \ln m - \ln V$

On applique la différentielle

$(\ln\rho)' = (\ln m - \ln V)' = (\ln m)' - (\ln V)'$

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - \frac{dV}{V}$

Alors $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}$ car $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{1}{m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{-1}{V}\right| \cdot \Delta V$

A.N : $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{1}{199{,}9\times10^{-3}}\right| \cdot 0{,}1\times10^{-3} + \left|\frac{-1}{25{,}2\times10^{-6}}\right| \cdot 0{,}2\times10^{-6}$

$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}005 + 0{,}007 = 0{,}0129$

$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 1{,}29\% \simeq 1{,}3\%$

$\Rightarrow \Delta\rho = 0{,}0129 \times \rho = 0{,}0129 \times 789{,}7 = 10{,}18 \ kg/m^3 \simeq 10 \ kg/m^3$

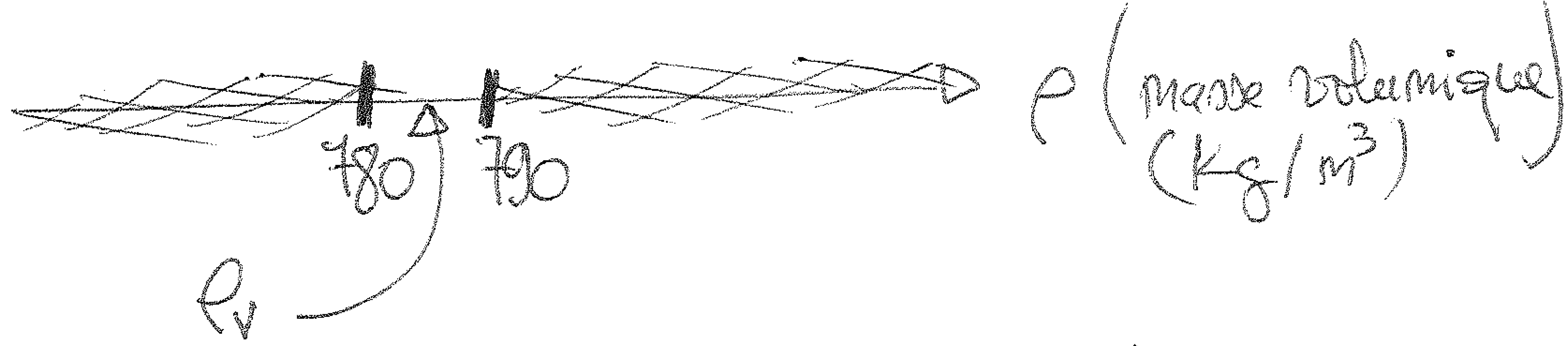
- Les résultats sont les mêmes. Alors, nous pouvons choisir l'une de ces méthodes $\Rightarrow$ choisir le cas le plus simple et facile.

- Intervalle de confiance de la mesure de la masse volumique (ρ) :

$$\rho_v = (\rho_m \mp \Delta\rho) \Leftrightarrow \rho_v \in [\rho_m - \Delta\rho, \ldots, \rho_m + \Delta\rho]$$

$$\rho_v \in [790 - 10, \ldots, 790 + 10]\ kg/m^3$$

$$\rho_v \in [780, \ldots, 800]\ kg/m^3$$



- Comparaison de précisions (incertitudes relatives) :

Mesure ① : $\frac{\Delta\rho}{\rho_m} \simeq 1{,}3\%$

Valeur donnée ② $\frac{\Delta\rho}{\rho_m} = \frac{1}{790} = 0{,}00127 \longrightarrow$ très très petite

$\frac{\Delta\rho}{\rho_m} \simeq 0{,}13\%$.

La mesure donnée est plus précise que la mesure effectuée (cette mesure est 10 fois meilleure que la première mesure).

Son intervalle de confiance est :

$$\rho_M \in [790 - 1, \ldots, 790 + 1]\ kg/m^3$$

$$\rho_v \in [789, \ldots, 791]\ kg/m^3$$