Université de Béjaia
Faculté des sciences de la nature et de la vie
Département des TCSN
Première année LMD

2015-2016

Rattrapage de mathématiques (semestre 1)

Durée : 2 Heures

Exercice n°1(05pts)

Étant donnée la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1°/ Donner le domaine de définition de f , noté D_f.

2°/ Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$, on notera sa prolongée g.

3°/ Étudier la dérivabilité de g sur son domaine de définition D_g.

Exercice n°2(04.5pts)

Calculer :

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

Exercice n°3(04.5pts)

On compte respectivement 50, 75 et 100 employés dans 3 entreprises A, B et C, dont les proportions de femmes sont respectivement égales à 50%, 60% et 70%. Une démission a autant de chance de se produire chez tous les employés, indépendamment de leur sexe. Une employée donne sa démission. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise C ?

Exercice n°4 (Application du cours)(06pts)

Une usine produit des boulons en série. Parmi les boulons produits 5% sont défectueux. Dans un lot très important de boulons, on en tire n au hasard ; soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boulons défectueux parmi les n choisis :

1°/ On suppose que $n = 5$:

a- Quelle loi suit X ?

b- Calculer $P(X = 2)$ et $P(X \leq 2)$.

2°/ On suppose maintenant que $n = 60$:

a-Quelle loi suit X ?

b- Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

c- Par quelle loi peut-on approcher X ?

d- Calculer $P(X = 5)$ et $P(X \geq 3)$.

Intégrale $F(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\, 1)$.

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad F(-t) = 1 - F(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Utilisation

On lit les décimales dans les lignes, et les centièmes en colonnes.

Par exemple, la valeur de $F(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05 - on trouve $F(1.65) = 0.9505$, à 10^{-4} près. Pour les valeurs négatives de t, on utilise la relation $F(-t) = 1 - F(t)$.

Corrigé du rattrapage 1LMD (2015-2016)

Mathématiques

Exo n° 1 (05 pts)

1) $D_f = \{ \forall x \in \mathbb{R} / \; x \neq 0 \text{ et } x+1 \geq 0 \}$.

d'où $D_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ (0,1)

2/ Calculons : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$. (1)

d'où f est prolongeable en $x=0$ et sa prolongée est donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ (0,1)

3/ sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$ la f^{ct} g est dérivable car c'est le quotient de deux f^{cts} dérivables. (0,1)

En $x=0 \Rightarrow g(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-(2+x)}{2x^2}$$

$$\overset{RH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{4x} \overset{RH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}/(1+x)}{4} = -\frac{1}{8}$$ (2)

Conclusion g est dérivable sur D_g (0,1)

NB : on peut faire pour 3. le calcul direct.

avec $$\lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-(2+x)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4(1+x)-(4+4x+x^2)}{2x^2(2\sqrt{1+x}+2+x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}(2\sqrt{1+x}+2+x)} = -\frac{1}{8}.$$

Exo n° 2 (4,5 pts)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Ipp : On pose $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ v = \tan x \Leftarrow dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{cases}$ 1

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$$ 1

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$ 0,5

changement de variable $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx$ 0,5

d'où $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R}$ 1

finalement : $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x + \ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Exo n° 3 (4,5 pts)

Soit A : "événement l'employé travail dans l'usine A"

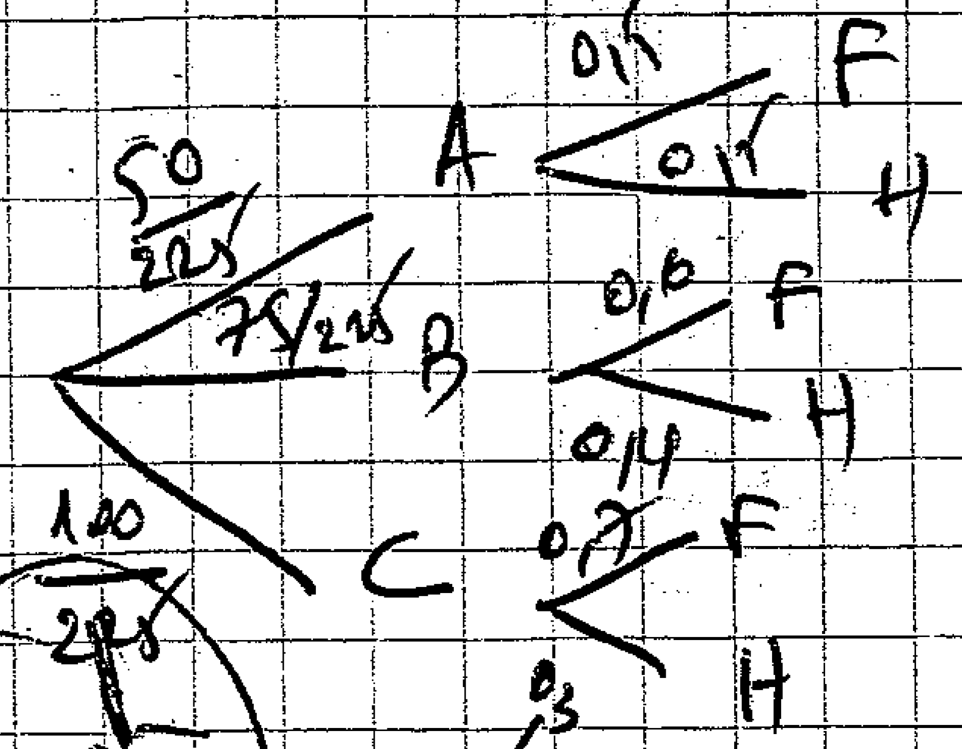
B : " " " " " " "B"

C : " " " " " " "C"

F : "événement l'employée est une femme"

H : " " employé est un homme"

On a :



1

On cherche 1

$$P(C/F) = \frac{P(C)\,P(F/C)}{P(A)\,P(F/A) + P(B)\,P(F/B) + P(C)\,P(F/C)}$$

$$= \frac{\frac{100}{225}\cdot 0{,}7}{\frac{50}{225}\cdot 0{,}5 + \frac{75}{225}\cdot 0{,}6 + \frac{100}{225}\cdot 0{,}7}$$

$$= \frac{70}{225}\cdot\frac{1}{\frac{25+45+70}{225}} = \frac{70}{140} = \frac{1}{2}$$ 2

Exo n° 4 (6pts)

1) a) X v.a comptant le nbre de boulons défectueux,
le boulon peut être défectueux ou non. (deux éventualités) (1)
Dans un grand lot de boulons → répétition.
chaque boulon est indépendant de l'autre → loi Binomiale

$p = 0{,}05 = \frac{1}{20}$ $\mathcal{B}\left(n=5, p=\frac{1}{20}\right)$ (0,1)

$X \sim \mathcal{B}(5, 0{,}05)$

$P(X=k) = C_5^k \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(\frac{19}{20}\right)^{5-k}$ (0,1)

b- $P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^3 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{(19)^3}{(20)^5} = \frac{6859}{320000} = 0{,}021$

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= C_5^0 \left(\frac{19}{20}\right)^5 + C_5^1 \frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^4 + 0{,}021$ (0,1)

$= \frac{(19)^5}{(20)^5} + \frac{1}{4}\frac{(19)^4}{(20)^4} + 0{,}021 = 0{,}774 + 0{,}204 + 0{,}021 = 0{,}999$

2) a.) $X \sim \mathcal{B}\left(60, \frac{1}{20}\right)$ (0,1)

b-) $E(X) = np = \frac{60}{20} = 3$ (0,1)

$V(X) = npq = 3 \cdot \frac{19}{20} = 2{,}85$ (0,1)

(0,1)

c- $np = 3 < 5 < 15$ et $n = 60 > 50$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(60, 0{,}05)$ peut être approchée par $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 3$. (une loi de Poisson).

$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

d- $P(X=5) = \frac{3^5 e^{-3}}{5!} = \frac{243}{120} e^{-3} = \frac{0{,}045}{120}$ 0,045 (0,1)

$= 0{,}099 \simeq 0{,}1$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$= 1 - \left[\left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right)e^{-3}\right] = 1 - \left[\left(4 + \frac{9}{2}\right)e^{-3}\right]$ (0,1)

$= 1 - \frac{17}{2}e^{-3} \simeq 0{,}58\ldots$