République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des S.E.C.G.
Département d'Économie

Polycopié de cours

Master I en Economie Appliquée Ingénieur Finance

Économie de l'incertain et théorie du risque (Fondements théoriques)

Préparé par :

Dr LEKADIR OUIZA EP. IAMOUCHENE.

Maître de conférences de classe B au Département d'Informatique
Faculté des Sciences Exactes, Université de Béjaia.

Table des matières

Avant-propos

Ce fascicule, a été conçu comme support de cours pour les enseignements du module ”Économie de l’Incertain et Théorie de Risque”, que nous avons assuré au niveau du Département des Sciences Économiques, Faculté S.E.C.G. de l’université A/Mira de Bejaia, de (2010-2011) à (2014-2015).

Ce cours s’intéresse à la prise de décision des agents économiques lorsqu’ils ne connaissent pas avec exactitudes les conséquences de leurs actions. Son objectif principal est de proposer une représentation et une analyse théorique du comportement de ces agents dans une telle situation d’incertitude. En ayant ces fondements théoriques, on peut représenter l’incertitude d’une manière formelle. Ainsi, l’étudiant en économie :

- ► pourra quantifier l’incertitude ;
- ► disposera d’un ensemble de critères de décisions pour choisir et présenter ses choix ;
- ► maîtrisera des notions, concepts et méthodes théoriques largement utilisées en : finances, assurance, micro-économie, macro-économie, théorie des jeux, marketing, ...

Ce support de cours est censé être complété par des annotations et être accompagné des explications orales (données lors du cours). Si les étudiants n’ont pas assisté au cours, la lecture seule des pages de ce document peut l’amener à faire des contresens importants.

Le module ”Économie de l’incertain et théorie de risque” a été intégré dans le nouveau programme lancé dans le cadre du système LMD. La démarche consiste à introduire certaines matières, options, voire spécialités émergeantes. L’une des spécialités introduite justement au Département des Sciences Économiques est ”Économie Appliquée et Ingénierie Financière” (EAIF). On a conçu le programme détaillé de ce module ”Economie de l’incertain et théorie de risque” dans le cadre du Master I de cette spécialité en s’appuyant sur diverses références : des ouvrages reconnus dans la discipline, mais aussi et surtout des ressources en ligne. Les principales références que nous avons utilisées pour la composition de ce support sont données dans la bibliographie, particulièrement l’excellent ouvrage de ”Microéconomie de l’incertain” d’Octave Jokung Nguéna [7].

Introduction générale

L'économie et particulièrement la micro économie s'attaque d'une part à décrire les choix individuels menant à la maximisation de la satisfaction ou du profit dans le cadre de situation de rareté et consiste d'autre part à l'étude de la confrontation et de la coordination de ces différentes décisions. Dans ce cours nous nous intéresserons principalement aux décisions individuelles [7].

De tous les travaux qu'un agents économique peut réaliser, la prise de décision à cours et à long terme est certainement la plus importante, car c'est la décision qui engage l'avenir de l'entreprise. Une mauvaise décision peut condamner la survie de cette entreprise. En effet, la prise de décision est un choix irréversible qui nécessite des fonds substantiels. C'est pourquoi, des outils d'aide à la décision basés sur l'application de techniques quantitatives sont proposés afin de permettre une meilleure évaluation de la décision à prendre.

En principe, les agents économiques sont supposés détenir l'information relative aux paramètres conditionnant leurs choix. Or l'incertitude fait partie intégrante de la vie des agents économiques et en faire abstraction conduirait à des conséquences regrettables. Ce faisant, les modèles de base de l'économie se doivent d'être élargis afin d'intégrer cette nouvelle dimension. Face à l'incertitude, l'attitude des agents se trouvera modifiée. Ainsi, l'introduction de cette nouvelle dimension dans l'économie est jalonnée de paradoxes et donne lieu à la naissance de l'économie de l'incertain où les agents sont constamment confrontés à des choix en avenir incertain dans les contextes aussi divers que constituent la consommation, l'épargne, la production, ... et les décisions stratégiques.

En économie de base, les choix étudiés conduisent à des conséquences certaines, à savoir :

- ► **les choix de consommation :** acquisition des biens de consommation, durables,...(la qualité, la quantité sont connues avec certitude).
- ► **les choix de production :** acquisition de facteurs de production, durables,...(la qualité, la quantité sont connues avec certitude).
- ► **les choix de stratégies :** les caractéristiques des autres agents sont connues et certaines.

Cependant, l'économie de l'incertitude propose une extension des résultats traditionnels de l'économie pour traiter les situations incertaines. Ceci dit, l'économie de l'incertitude ne remet pas en cause les résultats standards, mais cherche à les reformuler et éventuellement à les généraliser. Ainsi, l'économie de l'incertitude va utiliser des concepts et définitions qui lui sont spécifiques : Les états de la nature, les critères de choix dans l'univers incertain, les critères de choix dans l'univers risqué, l'utilité à la Von Neumann Morgenstern, espérance d'utilité, ... etc. Ces concepts et définitions sont à la base des cours de la micro-économie, de la macro-économie moderne et de l'économie appliquée en générale.

Ce support de cours d'économie de l'incertain et théorie de risque s'intéresse, comme on la dit auparavant, à la prise de décision des agents économiques lorsqu'ils ne connaissent pas avec exactitudes les conséquences de leurs actions. Ainsi, dans ce cours nous donnerons des concepts théoriques fondamentaux pour savoir comment prendre en compte l'incertitude et le manque d'informations sur les conséquences des problèmes de décision en incertitude.

Ce support de cours, s'articulera autour de six chapitres.

Dans le chapitre 1, nous rappelons et donnons les concepts de base de la dimension de la prise de décision, nous allons donner les notions élémentaires qui seront utilisées ou auxquelles nous allons faire référence par la suite. Par ailleurs, on se donnera un exemple introductif qui illustrera les différents critères de décisions qui seront aborder dans les chapitres suivants.

Dans le chapitre 2, nous nous placerons dans le cadre de l'incertitude au sens de Frank Knight (univers mesurable). Nous définirons les critères de choix les plus utilisés dans cet univers. Chacun de ces critère sera illustré à l'aide de l'exemple introductif donné au chapitre 1.

Dans le chapitre 3, nous nous placerons dans le cadre de l'avenir risqué au sens toujours de Frank Knight. D'une manière analogue à celle du chapitre 2, nous définirons les critères de choix les plus utilisés dans cet univers qui seront illustrés à l'aide de l'exemple introductif donné au chapitre 1.

Dans le chapitre 4, nous analyserons l'acquisition de l'information par le biais des probabilités et son action sur le processus décisionnel.

Dans le chapitre 5, nous présenterons la généralisation du critère de BERNOULLI, donné dans le chapitre 3, par l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern. Ensuite nous donnerons les propriétés de la fonction d'utilité permettant de mettre en évidence l'attitude des agents économiques face au risque.

Dans le chapitre 6, on donnera des exercices pris des divers références données dans ce fascicule. Ces exercices permettrons de familiariser les étudiants à l'integration de la dimension incertitude dans le processus décisionnel des agents économiques.

Enfin, ce support de cour se clôturera par une conclusion générale et une liste de références.

Chapitre 1

Définitions et rappels de quelques concepts de base de la dimension de la prise de décision

1.1 Introduction

L'activité d'un dirigeant est souvent perçue au travers de la fonction jugée la plus caractéristique : la prise de décision. Gérer, c'est décider.
La nécessité de prendre des décisions face à l'incertitude fait partie intégrante de notre vie. Effectivement, des situations où il n'est pas possible de connaître à l'avance et de manière exacte les conséquences d'une décision se présentent aussi bien dans la vie professionnelle que dans la vie privée. Afin de fournir une méthodologie rationnelle de prise de décision, la théorie de décision a été développée. Vu l'importance du sujet pour les décideurs dans les entreprises qui doivent prendre des décisions sur le court et long terme, cette théorie a trouvé un large écho dans le monde économique. Une situation de prise de décision dans un environnement incertain peut être définie formellement est ce grâce à des méthodes d'aide à la décision.
Afin d'expliquer le fonctionnement et l'apport de ces méthodes d'aide à la décision en général, nous allons préciser, dans ce chapitre, la définition de la décision et les différents types de décisions ainsi que les bases sur lesquelles est fondée la prise de décision et sa typologie. Le reste du chapitre, sera consacré à la présentation de définitions, notions, concepts et résultats visant à aider l'étudiant à comprendre les bases de la prise de décision pour pouvoir comprendre les autres chapitres.

1.2 Notions de décision et de prise de décision

Pour mieux cerner la notion de décision, nous allons présenter quelques définitions données dans la littérature.

- ▶ Décider en Latin signifie trancher.
- ▶ L'analyse de la gestion montre l'importance de la décision qui est parfois définie comme «La science des choix».
- ▶ Une décision est un choix effectué à un moment donné, dans un contexte donné parmi plusieurs possibilités, pour impulser des actions d'ampleur et de durée variables.
- ▶ Une décision est un choix, entre plusieurs solutions possibles, d'une action portant sur la mise en oeuvre de ressources ou la détermination des objectifs, compte tenu d'un ou plusieurs critères d'évaluation des solutions.

Dans ces définitions, on constate des évolutions. Ces évolutions sont compréhensibles car elles ne font que souligner les mutations du système décisionnel. L'environnement de l'entreprise est devenu plus complexe, plus incertain aussi et la prise de décision ne repose plus sur un seul individu mais partagée par un nombre élevé d'acteurs agissant au sein de l'entreprise. Cependant, dans ce cours, on se limitera aux cas des décisions individuelles.

1.3 Les determinants de la prise de décision

La décision est la partie la moins visible de la politique de l'entreprise. C'est pourtant un moteur principal puisqu'à travers elle ; les idées, les sentiments, les ambitions des individus se transforment en action. La décision résulte de multiples variables :

- la décision est une nécessité : lorsqu'un problème se manifeste ; ne pas prendre de décision revient à laisser se dégrader la situation ;
- les décisions ne sont pas toutes de mêmes importances : certaines engagent le devenir de l'entreprise, d'autres n'ont que des conséquences limitées ;
- la décision peut être individuelle (prise par le chef d'entreprise, le manager d'une équipe) ou collective (prise par exemple après négociation avec les représentants des salariés) ;
- la qualité d'une décision ne peut s'apprécier qu'après l'analyse des résultats obtenus, toutes fois une bonne décision doit entraîner de suite l'adhésion des personnes qui doivent la mettre en oeuvre.

La prise de décision est influencée par de nombreux facteurs :

- le comportement et la personnalité du décideur ;
- la structure et la culture de l'entreprise ;
- le niveau de rationalité ;
- la nature de la décision ;
- l'environnement ;
- les axes stratégiques de l'entreprise ;
- les objectifs de performance, ...

1.4 Typologie des décisions

Les décisions sont si nombreuses, elles s'appliquent à des problèmes tellement différents, elles comportent un mélange d'éléments quantitatifs et de facteurs qualitatifs.

I. Approche selon l'échéance des décisions

- **Décision à court terme :** décision qui engage l'avenir sur une courte période autrement dit de quelques jours a quelques mois (pas plus d'un an en général).
  (Exemple : Embauche d'un salarié pendant 2 mois en remplacement d'un autre en congé).
- **Décision à moyen terme :** décision qui engage l'avenir sur une période de 1 an à quelques années. (Exemple : Achat d'un micro-ordinateur).
- **Décision à long terme :** décision qui engage l'avenir de l'entreprise sur la longue période (5 ans, 10 ans, voire plus). (Exemple : Lancement d'un nouveau produit).

II. Approche selon l'objet de la décision

- **Décision stratégique :** décision fondamentale, essentielle, qui engage l'avenir de l'entreprise à moyen et long terme. Elle doit être mûrement réfléchie et engage l'avenir. Ce type de décision est du ressort de la direction générale ou du conseil d'administration. (Exemple : fusion avec une autre entreprise).
- **Décision opérationnelle :** décision qui se prend au bas de la pyramide hiérarchique, et qui consiste à assurer le fonctionnement courant et constant de l'entreprise. Une décision opérationnelle, ou "décision de routine" ne pose pas de difficulté spéciale. (Exemple : traitement administratif d'une commande).
- **Décision tactique :** décision qui se prend au niveau moyen de la hiérarchie. Les décisions de ce niveau sont des décisions de gestion qui assurent dans les moyens et court termes la réalisation des décisions stratégiques. (Exemple : choix du fournisseur informatique après adoption du plan d'informatisation).

III. Approche selon la nature des variables de décision

- **Décisions programmables :** ce sont des décisions faciles à prendre qui portent sur des variables quantitatives et peu nombreuses, car il est facile de formaliser la décision par l'élaboration d'un algorithme.
- **Décisions non programmables :** ce sont des décisions difficiles à prendre pour lesquelles les variables sont qualitatives et nombreuses. Il est difficile de les inclure dans un modèle mathématique.

1.5 Notion d'aide à la décision

L'aide à la décision est l'activité de celui qui (l'homme d'étude, l'ingénieur de la décision, le gérant de l'entreprise, ...), prenant appui sur des modèles clairement explicités, aide à obtenir des éléments de réponses aux questions posées dans un processus de décision. Ces éléments aident à éclairer la décision et à favoriser un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs d'autre part.

1.6 Les outils d'aide à la prise de décisions

De nombreuses techniques permettent au décideur de prendre certaines décisions. Les outils qu'il devra mettre en oeuvre, dépendent du problème initial et de la connaissance plus ou moins précise du décideur. Il est possible de classer les différentes situations en quatre catégories selon un degré d'incertitude croissant.

- ▶ L'aide à la décision en avenir certain : En univers certain, le décideur a une connaissance parfaite des différents paramètres de la décision. Il peut ainsi prévoir les conséquences de ses choix. Certaines techniques d'aide à la décision pourront néanmoins être utilisées pour évaluer les conséquences des différents choix possibles : la programmation linéaire (elle vise a déterminer un optimum en tenant compte des diverses contraintes de ressources), les techniques d'actualisation (elles permettent au décideur d'apprécier la rentabilité économique d'un investissement), ou encore les réseaux (ils ont pour but de minimiser les coûts et les délais des programmes) sont des outils d'aide à la décision qui peuvent assister le décideur lors de ses choix.

- **L'aide à la décision en avenir incertain :** En univers aléatoire, le décideur peut associer une probabilité à chaque éventualité de la décision. Le calcul des probabilités (espérance mathématique), des statistiques (variance, écart type pour apprécier les risques), et la technique des arbres de décisions (intéressante lorsque l'on veut étudier les conséquences d'une série de décisions successives) pourront l'assister dans le processus conduisant au choix final.
- **L'aide à décision en avenir aléatoire :** En univers incertain, le décideur n'a pas suffisamment d'informations pour connaître ou prévoir les différents événements liés à la décision. Dans de telles situations, il peut faire appel à certains critères de la théorie des jeux. C'est un instrument de recherche qui permet l'analyse des décisions des agents économiques.
- **L'aide à décision en univers conflictuel :** Tous les événements dépendent d'intervenant par nature hostiles. Les décisions peuvent en effet concerner plusieurs agents. La théorie des jeux peut une nouvelle fois permettre au décideur d'analyser une décision dans une situation où plusieurs agents économiques inter-agissent. Chacun devra tenir compte des actions des autres joueurs pour prendre une décision.

1.7 Système de décision et système d'informations

La décision est un choix délibéré entre plusieurs solutions pour atteindre un objectif, un choix déterminé en fonction des critères de sélection et des moyens disponibles. C'est enfin de compte le choix d'une action portant sur la mise en oeuvre des outils de pilotage ou sur la détermination des objectifs de performance.

L'information est tout élément susceptible d'augmenter le degré de connaissance d'un phénomène et corrélativement de diminuer le degré d'incertitude. Les flux d'informations coordonnent et contrôlent les flux matériels, financiers et humains. Le rôle de l'information devient prépondérant dans toute entreprise ; c'est pourquoi la mise en place d'un système d'informations s'avère indispensable au pilotage de l'entreprise.

Même si elle est finalement le choix d'une personne, la décision fait généralement, compte tenu de la rationalité limitée, l'objet d'une préparation à laquelle participent un grand nombre d'organes dans l'entreprise en se basant éventuellement sur des outils de pilotage appropriés. L'ensemble de ces éléments en interaction dynamique et ayant un objectif constitue donc un système de décision.

1.8 Décisions dans l'incertitude et décisions dans le risque

1. Les différentes utilisations du mot risque

Le mot "risque" est ambigu dans le langage :

- dans le langage courant, il est associé à un danger ;
- il désigne à la fois un événement aléatoire et sa probabilité selon le contexte (exemple : risque d'accident) ;
- en gestion il est associé à une perte ;
- pour les gains, on parle généralement de chance ;
- en statistique, il désigne une probabilité de rejet (premier espèce $P\{D_1/H_0\}$) mais également d'acceptation (second espèce $P\{D_0/H_1\}$) ;
- en assurance, il désigne ce qui fait l'objet de l'assurance et la qualité de l'objet, voire de la performance, en regard de la protection (bons vs mauvais risques).

2. La notion de risque et d'incertitude selon FRANCK KNIGHT

Par leur réflexion à la fois philosophique et économique, FRANCK KNIGHT (1921) et JOHN MAYNARD KEYNES (1923, 1936) ont ouvert la voie à un débat essentiel : est-il possible de rendre compte scientifiquement de l'incertitude ? Autrement dit :

Peut-on se donner une representation de l'incertitude dans la vie économique ?

En 1921, dans un article intitulé "Risk, Uncertainty and Profit", FRANCK KNIGHT effectue une distinction entre risque et incertitude :

«La différence pratique entre les deux catégories, le risque et l'incertitude, est que, s'agissant de la première, la distribution du résultat parmi un ensemble de cas est connue (soit par le calcul a priori, soit par des statistiques fondées sur les fréquences observées), tandis que ceci n'est pas vrai de l'incertitude en raison de l'impossibilité de regrouper les cas, parce que la situation à traiter présente un degré élevé de singularité » (1921, p. 233).

Ainsi, selon FRANCK KNIGHT et JOHN MAYNARD KEYNES :
►**Une situation est dite risquée (Décision dans le risque) si :** Il est possible d'affecter des probabilités à la réalisation des divers états de la nature. En fait il y a 2 écoles de pensée dans ce sens :

1. L'école « bayésienne » (du nom de BAYES), qui soutient que : « tout décideur rationnel doit se comporter comme si tous les événements avaient des probabilités, celles-ci pouvant varier d'une personne à l'autre » d'où leur dénomination de "probabilités subjectives".
2. L'école «non-bayésienne» (plus statistique) considère les situations de risque comme un cas particulier des situations d'incertitude : c'est le comportement du décideur qui permet de reconnaître s'il attribue des probabilités aux événements et, si oui, quelles sont leurs valeurs.

►**Une situation est dite incertaine (Décision dans l'incertitude) si :** Il n'est pas possible d'affecter des probabilités à la réalisation des divers états de la nature.

La richesse de la définition FRANCK KNIGHT et JOHN MAYNARD KEYNES se retrouve dans les analyses "macroscopiques" qui endogénéisent l'incertitude et la rende consubstantialle aux marchés financiers [9].

1.9 Comment résoudre un problème de décision

La décision étant un art difficile, surtout quant elle concerne l'avenir, il est rare qu'il soit possible de décrire avec certitude les conséquences de la mise à exécution d'une action ou d'une stratégie.
Dans un problème de décision dans l'incertain on suppose que les conséquences des actions des agents dépendent de l'occurrence de divers événements, on dira par la suite des "états de la nature". La Nature étant supposée décider de ce qui n'est pas sous notre contrôle, on supposera quelle est "indolente" (elle ne cherche systématiquement ni à nous avantager ni à vous désavantager). Le noeud d'un tel problème de décision réside dans le fait que l'on doit choisir une action avant d'avoir connaissance de la décision de la nature. De façon symbolique, la modélisation d'un tel problème implique de définir :

a. La notion d'états de la nature

La nature peut comporter plusieurs états mutuellement exclusif. On note ces états de la nature e_i. La nature est l'ensemble de ces états. Cet ensemble est noté E :

$$E = \{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n\}.$$

b. La notion d'action ou de stratégie

Le décideur peut avoir le choix entre différentes actions à mettre à execution, notées a_j. L'ensemble des actions possibles est noté A :

$$A = \{a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_m\}.$$

c. La notion de résultats ou la notion de conséquences

On prend comme hypothèse dans ce cours que "le choix d'une action n'influence pas l'état de la nature". Par ailleurs, si un agent choisi une action a_j et que l'état de la nature e_i se réalise, le résultat (conséquence) sera noté(e) R_{a_j,e_i}. L'ensemble des résultats possibles sera noté R :

$$R = \{R_{a_1,e_1}, \cdots, R_{a_j,e_i}, \cdots, R_{a_m,e_n}\}.$$

d. La notion de probabilité d'occurrence des états de la nature

L'état de la nature e_i possède une probabilité d'occurrence notée $Prob\{e_i\}$ ou P_{e_i}. Comme les états de la nature sont mutuellement excluables alors :

$$\sum_{i=1}^{n} Prob\{e_i\} = 1.$$

e. La matrice des résultats

Elle donnée comme suit :

Actions \ Etats	e_1	$\cdots\cdots$	e_i	$\cdots\cdots$	e_n
a_1	$R_{1,1}$	$\cdots\cdots$	$R_{1,i}$	$\cdots\cdots$	$R_{1,n}$
a_2	$R_{2,1}$	$\cdots\cdots$	$R_{2,i}$	$\cdots\cdots$	$R_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\cdots$	$\vdots$	$\cdots\cdots$	$\vdots$
a_m	$R_{m,1}$	$\cdots\cdots$	$R_{m,i}$	$\cdots\cdots$	$R_{m,n}$
$Prob\{e\}$	$Prob\{e_1\}$	$\cdots\cdots$	$Prob\{e_i\}$	$\cdots\cdots$	$Prob\{e_n\}$

où on suppose que $|A| = m$ et $|E| = n$.
Pour résoudre un problème de décision, il faut :

- ▶ choisir un critère de décision ;
- ▶ déterminer la meilleure action selon ce critère. A chaque action a_i est associée une valorisation V_i selon le critère considéré.

1.10 Exemple introductif

Pour bien comprendre la méthode d'aide à la décision en incertitude, nous allons emprunter à A. GREMILLET [5] l'exemple suivant :
Une société productrice de biens de grande consommation occupe (28%) du marché français contre (47%) et (20%) pour ses deux principaux concurrents et (5%) pour quelques entreprises marginales. Désireuse d'accroître sa part de marché et son profit, la société envisage quatre stratégies (actions) possibles :

a_1 : lancer un produit nouveau ;
a_2 : lancer une campagne publicitaire pour les produits existants ;
a_3 : mener une campagne de promotion des ventes pour ces mêmes produits ;
a_4 : pratiquer une politique de baisse des prix.
Au terme d'une analyse de la concurrence les dirigeants de la société sont amenés à considérer que la réaction des concurrents peut prendre trois formes :
e_1 : la concurrence réagit vite et avec vigueur à l'offensive menée par la société ;
e_2 : la concurrence riposte fermement mais toutefois sans agressivité ;
e_3 : la concurrence ne réagit que faiblement aux initiatives prises par la société.
Enfin, après avoir analysé les conséquences financières de chacune des stratégies dans le cadre de chacun des états de la nature, les dirigeants aboutissent à la matrice des gains suivants :

Actions \ États	e_1	e_2	e_3
a_1	-600.000	400.000	$1.100.000$
a_2	-50.000	100.000	300.000
a_3	-400.000	200.000	700.000
a_4	-100.000	300.000	800.000

1.11 Quelques rappels sur la modélisation des préférences

Dès lors que l'on se préoccupe de la décision, il est naturel de chercher comment comparer en termes de préférence les objets de la décision. La littérature relative à la modélisation des préférences est très riche, ceci est dû au fait que la nécessité de modéliser des préférences est indispensable dans divers disciplines : Économie, psychologie, recherche opérationnelle, etc [1]. Comme on vient de le dire le domaine de la modélisation des préférences est varié et très riche, mais on va se limiter à donner quelques définitions qui sont indispensables pour comprendre ce cours. Bien sûr, une étude approfondie sur la modélisation des préférences est indispensable pour approfondir aussi l'étude des techniques aide à la décision en incertitude.

1. Relations binaires

Les notions que nous allons donner ici ne seront pas toutes utilisées dans la suite du cours, mais elles sont indispensables pour la compréhension d'autres ouvrages de références.

Définition 1.1. Une relation binaire R dans un ensemble E (dans ce cours on se limitera au cas où E est fini) est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times E$. C'est à dire, c'est un ensemble de couples (a, b) d'éléments de E. Si le couple $(a, b) \in E$, on notera aRb, sinon on notera $a\neg Rb$.

2. Propriétés d'une relation binaire

Une relation binaire R dans E est :
► reflexive si et seulement si :

$$\forall x \in E, \text{ on a : } xRx.$$

► irreflexive si et seulement si :

$$\exists x \in E, \text{ tel que } x\neg Rx.$$

- symétrique si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \text{ on a : } xRy \Rightarrow yRx.$$

- anti-symétrique si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \text{ on a : } [xRy \text{ et } yRx] \Rightarrow x = y.$$

- asymétrique si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \text{ on a : } xRy \Rightarrow y\neg Rx.$$

- connexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \text{ on a : } x \neq y \Rightarrow [xRy \text{ et/ou } yRx].$$

- complète si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \text{ on a : } xRy \text{ et/ou } yRx \text{ tel que } x \neq y.$$

- transitive si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E, \text{ on a : } [xRy \text{ et } yRz] \Rightarrow xRz.$$

- négativement transitive si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E, \text{ on a : } [x\neg Ry \text{ et } y\neg Rz] \Rightarrow x\neg Rz.$$

- semi-transitive si et seulement si :

$$\forall x, y, z, h \in E, \text{ on a : } [xRy \text{ et } yRz] \Rightarrow [xRh \text{ ou } hRz].$$

- De FERRERS si et seulement si :

$$\forall x, y, z, h \in E, \text{ on a : } [xRy \text{ et } zRh] \Rightarrow xRh \text{ ou } zRh.$$

- une relation d'équivalence si et seulement si elle est reflexive, symétrique et transitive.
- un ordre partiel strict si et seulement si elle est asymétrique et transitive.
- un ordre partiel si et seulement si elle est reflexive, anti-symétrique et transitive.
- un préordre partiel si et seulement si elle est reflexive et transitive.
- un préordre complet si et seulement si elle est reflexive, transitive et complète.
- un ordre complet si et seulement si elle est reflexive, transitive, anti-symétrique et complète.

3. Structures de préférences des actions

Définition 1.2. On appelle structure de préférence sur l'ensemble d'actions A la donnée d'une relation binaire reflexive S dans cet ensemble A.

Définition 1.3. Les relations binaires $R_1, R_2, \cdots R_n$ sont dites :

- ”exhaustives”, si pour une paire d'actions quelconques une au moins de ces relations est vérifiée, c'est à dire :

$$\forall a_1, a_2 \in A, \exists i \in \{1, 2, \cdots n\} \text{ tel que } a_1 R_i a_2 \text{ ou } a_2 R_i a_1.$$

► ”mutuellement exclusives”, si pour une paire d'actions quelconques, deux relations distinctes ne sont jamais vérifiées en même temps, c'est à dire :

$$\forall a_1, a_2 \in A, \forall i, j \in \{1, 2, \cdots n\}, a_1 R_i a_2 \Rightarrow [\neg(a_1 R_j a_2] \text{ et } \neg(a_2 R_j a_1), \forall j \neq i].$$

Définition 1.4. Les relations binaires $R_1, R_2, \cdots R_n$ constituent une structure de préférence si elles sont exhaustives et mutuellement exclusives.

Face à deux actions, le décideur peut avoir l'une des trois attitudes suivantes vis à vis des actions auxquelles il est confronté :

- préférence pour l'une des deux actions ;
- indifférence entre les deux actions ;
- incompatibilité des deux actions.

Ainsi, on note :

- $a_1 \succ a_2$ si a_1 est préférée à a_2.
- $a_1 \approx a_2$ si a_1 et a_2 sont indifférentes l'une par rapport à l'autre.
- $a_1 \, ? \, a_2$ si a_1 et a_2 sont incompatibles.

Remarque 1.1. *Il est facile de vérifier que si les trois relations ($\succ, \approx, ?$) vérifient les propriétés suivantes :*

$$\forall a_1, a_2 \in A : \begin{cases} a_1 \succ a_2 \Rightarrow a_2 \neg \succ a_1, \ \textit{i.e.} \ \succ \ \textit{est asymétrique ;} \\ a_1 \approx a_1, \ \textit{i.e.} \ \approx \ \textit{est réfléxive ;} \\ a_1 \approx a_2 \Rightarrow a_2 \approx a_1, \ \textit{i.e.} \ \approx \ \textit{est symétrique ;} \\ a_1 \neg ? a_1, \ \textit{i.e.} \ ? \ \textit{est irreflexive ;} \\ a_1 ? a_2 \Rightarrow a_2 ? a_1, \ \textit{i.e.} \ \textit{est symétrique ;} \end{cases}$$

alors, elles constituent une structure de préférence dans A.

4. La structure d'ordre total

Définition 1.5. Une structure de préférence R est une structure d'ordre total si et seulement si :

1. A est complète ;
2. A est transitive ;
3. A est anti-symétrique.

Si A est une structure d'ordre total sur A, alors on peut ranger les éléments de A du meilleurs au moins bon sans qu'il y ait d'ex-aequo possible.

Exemple :

Conformément à cette dernière définition, on peut bâtir un couple de relations $(\approx, \succ)$, dans l'ensemble des états de la natures d'un problème de décision en incertitude, ayant une structure d'ordre total. En effet, les relations $(\succ)$ et $(\approx)$ sont exhaustives et mutuellement exclusives, la relation $(\succ)$ est convexe et transitive et la relation $(\approx)$ est réduite aux couples identiques, i.e. $\approx = \{(a, a)/a \in A\}$.

1.12 Conclusion

Dans ce chapitre, on a survolé brièvement les différents(es) définitions, notions, concepts qui seront utilisés(ées) dans les chapitres suivants. Une étude plus approfondie de l'économie de l'”incertain et de la théorie de risque” nécessitera bien sûr une étude approfondie de ces concepts et notions.

Chapitre 2

Les critères de décision en univers non mesurable (univers incertain)

2.1 Introduction

En univers non mesurable (incertain) le décideur a une connaissance, exhaustive ou non, des diverses éventualités, toutefois, en dépit de tous ces éléments d'information, il ne se sent pas en mesure d'affecter une quelconque probabilité de réalisation à chacune des réactions possibles de la nature. C'est dans le cadre d'une situation de ce type qu'un recours aux critères de décision en univers non mesurable est souvent proposé.
Un très grand nombre de ces critères de décision ont été formulés : nous nous limiterons dans ce cours à la présentation et à l'évaluation des critères les plus significatifs, à savoir le critère : de LAPLACE, de WALD, de MAXMAX, de SAVAGE, d'HURWITZ, de BERNOULLI et le critère de MOYENNE-VARIABILITE. Chacun de ces critères correspond à un type de comportement particulier des décideurs. Nous définirons pour chacun de ces critères une fonction de valorisation V et un critère de choix, qui permettront d'établir un classement dans l'ensembles des actions possibles A et définir ainsi l'action optimale.

2.2 Le critère de LAPLACE

Il consiste à faire usage du "principe de raison insuffisante" pour supposer que la vraisemblance des divers états de la nature est identique puisque l'on ne dispose d'aucune information quant à leur vraisemblance relative. Ce critère consiste donc à effectuer une simple moyenne arithmétique des revenus espérés, associés pour chaque action aux divers états de la nature, puis à retenir l'action dont la moyenne est la plus élevée. En effet, la fonction de valorisation et le critère de choix de ce critère sont donnés comme suit :

Fonction de valorisation :

Évaluer la moyenne des résultats de chaque action :

$$V(a_j) = moy(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{e_i=e_1}^{e_n} R_{a_j,e_i}.$$

Critère de choix :

Classer les actions par moyenne croissante, puis choisir l'action optimale comme celle dont la moyenne est la plus élevée. i.e :

$$a_k \succ a_l \Leftrightarrow \Big[V(a_k) = moy(a_k)\Big] > \Big[V(a_l) = moy(a_l)\Big].$$

Donc on a :

$$a^* \in arg \ \max \ V(a_j).$$

Exemple :
Dans l'exemple introductif donné, le choix du critère de LAPLACE comme aide à la décision conduirait les dirigeants de l'entreprise à retenir l'action a_4, c'est-à-dire une baisse de prix. En effet :

$$\begin{aligned}
V(a_1) = moy(a_1) &= \frac{1}{3}\sum_{e_i=e_1}^{e_3} R_{a_j,e_i} = \frac{1}{3}(-600.000 + 400.000 + 1.100.000) = 300.000; \\
V(a_2) = moy(a_2) &= \frac{1}{3}\sum_{e_i=e_1}^{e_3} R_{a_j,e_i} = \frac{1}{3}(-50.000 + 100.000 + 300.000) = 116.667; \\
V(a_3) = moy(a_3) &= \frac{1}{3}\sum_{e_i=e_1}^{e_3} R_{a_j,e_i} = \frac{1}{3}(-400.000 + 200.000 + 700.000) = 166.667; \\
V(a_4) = moy(a_4) &= \frac{1}{3}\sum_{e_i=e_1}^{e_3} R_{a_j,e_i} = \frac{1}{3}(-100.000 + 300.000 + 800.000) = 333.333.
\end{aligned}$$

On a : $\Big(V(a_4) > V(a_1) > V(a_3) > V(a_2)\Big) \Rightarrow \Big(a_4 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_2\Big) \Rightarrow a^* = a_4.$

L'avantage de ce critère réside dans sa simplicité de calcul, son inconvénient majeur est d'être peu réaliste : on prétend raisonner en avenir indéterminé, c'est-à-dire dans le cadre d'une situation où l'on ne peut pas, ou ne veut pas, affecter une probabilité de réalisation à chacun des états de nature, alors que le choix du critère de LAPLACE équivaut, par l'intermédiaire du choix de l'instrument «moyenne arithmétique», à attribuer implicitement la même probabilité d'arrivée aux divers états de la nature. Par ailleurs, ce critère correspond à un type de comportement des dirigeants d'entreprises tout à fait particulier, caractérisé par une neutralité totale à l'égard du risque. Nous verrons ultérieurement qu'un tel comportement est peu représentatif de leur attitude réelle à l'égard du risque : en effet ils sont rarement neutres à cet égard ; tantôt l'amour du jeu les conduira à un optimisme déraisonné, tantôt au contraire la crainte de l'échec les conduira à des évaluations systématiquement pessimistes du rendement de leurs projets d'investissement. C'est à des règles d'action correspondant à chacun de ces deux types de comportement que conduisent les critères suivants.

2.3 Le critère de WALD ou critère du MAXMIN

Le critère de WALD (dit aussi critère de MAXMIN) est le critère du "pessimisme absolu" : on fonde son choix uniquement sur ce qui arrivera de pire. L'adoption de ce critère correspond à une attitude prudente du preneur de décision : celui-ci cherchera à identifier pour chaque action possible l'état de nature qui conduirait aux moins bons résultats. Après quoi, il cherchera à se couvrir en adoptant l'action qui est susceptible de lui fournir, si l'évolution de la concurrence s'avère défavorable à l'entreprise, le résultat le moins mauvais possible (le maximum des minimums potentiels). Plus formellement le critère de WALD conduira à choisir l'action dont la fonction de valorisation suivante est la plus élevée.

Fonction de valorisation :

$$V(a_j) = \inf_{e_i} R_{a_j,e_i}.$$

Critère de choix :

$$\text{On a : } \Big[a_k \succ a_l\Big] \Leftrightarrow \Big[V(a_k) > V(a_l)\Big];$$

l'action optimale consistera à opter pour le plus grand maximum. C'est à dire :

$$a^* \in arg\ \max\ V(a_j).$$

Ce critère est trop pessimiste, en effet, en utilisant le critère de WALD, l'agent se comporte comme un pessimiste qui se dit : «je n'ai pas de chance donc je vais choisir l'action qui a le plus grand résultat minimum : je suis certain d'avoir au moins ce minimum». Ce critère convient au décideur ayant une aversion au risque.

Exemple :

Dans l'exemple introductif donné, le choix du critère de WALD conduira à choisir a_2, c'est-à-dire "le lancement d'une campagne publicitaire", qui donne une perte maximale de -50.000. En effet :

$$\begin{aligned}
V(a_1) &= \inf_{e_i} R_{a_1,e_i} = \inf_{e_i}\{-600.000, 400.000, 1.100.000\} = -600.000.\\
V(a_2) &= \inf_{e_i} R_{a_2,e_i} = \inf_{e_i}\{-50.000, 100.000, 300.000\} = -50.000.\\
V(a_3) &= \inf_{e_i} R_{a_3,e_i} = \inf_{e_i}\{-400.000, 200.000, 700.000\} = -400.000.\\
V(a_4) &= \inf_{e_i} R_{a_4,e_i} = \inf_{e_i}\{-100.000, 300.000, 800.000\} = -100.000.
\end{aligned}$$

On a : $\Big[V(a_2) > V(a_4) > V(a_3) > V(a_1)\Big] \Rightarrow \Big[a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1\Big] \Rightarrow a^* = a_2.$

2.4 Le critère du MAXMAX

Le critère du MAXMAX est le critère de "l'optimisme absolu" : on fonde son choix uniquement sur ce qui arrivera de meilleur. L'adoption de ce critère correspond à une attitude trop optimiste du preneur de décision : celui-ci cherchera à identifier pour chaque action possible l'état de nature qui conduirait aux meilleur bons résultats. Après quoi, il cherchera à gagner plus en adoptant l'action qui est susceptible de lui fournir le résultat dont le gain est le plus bon (le maximum des maximums potentiels). Plus formellement le critère de MAXMAX conduira à choisir l'action dont la fonction de valorisation suivante est la plus élevée.

Fonction de valorisation :

$$V(a_j) = \sup_{e_i} R_{a_j,e_i}.$$

Critère de choix :

$$\text{On a : } \Big[a_k \succ a_l\Big] \Leftrightarrow \Big[V(a_k) > V(a_l)\Big];$$

d'où :

$$a^* \in arg\ \max\ V(a_j).$$

Ce critère est trop optimiste, en effet, en utilisant le critère du MAXMAX, l'agent se comporte comme un optimiste qui ne voit que la possibilité de gagner le plus possible en omettant les possibilités de gain inférieur.
Exemple : Dans l'exemple introductif donné, le choix du critère du MAXMAX conduit à choisir a_1, c'est-à-dire "le lancement d'un produit nouveau", qui donne un gain maximal de $1.100.000$. En effet :

$$\begin{aligned}
V(a_1) &= \sup_{e_i} R_{a_1,e_i} = \sup_{e_i}\{-600.000, 400.000, 1.100.000\} = 1.100.000. \\
V(a_2) &= \sup_{e_i} R_{a_2,e_i} = \sup_{e_i}\{-50.000, 100.000, 300.000\} = 300.000. \\
V(a_3) &= \sup_{e_i} R_{a_3,e_i} = \sup_{e_i}\{-400.000, 200.000, 700.000\} = 700.000. \\
V(a_4) &= \sup_{e_i} R_{a_4,e_i} = \sup_{e_i}\{-100.000, 300.000, 800.000\} = 800.000.
\end{aligned}$$

On a : $\Big(V(a_1) > V(a_4) > V(a_3) > V(a_2)\Big) \Rightarrow \Big(a_1 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2\Big) \Rightarrow a^* = a_1.$

2.5 Le critère de SAVAGE

Comme le critère de WALD, ce critère de SAVAGE traduit une attitude de prudence de la part du décideur. Le principe de ce critère consiste à identifier pour chacun des états de la nature l'action la plus favorable, puis à évaluer le manque à gagner (regret) que présenterait, par rapport à cette action l'adoption de chacune des autres actions, enfin à retenir l'action conduisant au plus petit des regrets maximums.

Fonction de valorisation :

$$V(a_j) = SR(a_j) = \sum_{e_1}^{e_n} \Big(\sup_{a_j}\big(R_{a_j,e_i}\big) - R_{a_j,e_i}\Big)$$

Critère de choix :

Choisir l'action dont la fonction de regret est la plus faible ; i.e. :

$$a^* \in arg\ \min\ SR(a_j).$$

Exemple : Reprenons l'exemple introductif déjà considéré. Les regrets associés dans cet exemple à chacune des actions concurrentes sont les suivants :

Etats / Actions	Regret			SR(a)
	e_1	e_2	e_3	
a_1	550 000	0	0	**550 000**
a_2	0	300 000	700 000	**1 000 000**
a_3	350 000	200 000	400 000	**950 000**
a_4	50 000	100 000	300 000	**450 000**

En effet :

$$\begin{aligned}
V(a_1) &= SR(a_1); \\
&= (-50.000-(-600.000))+(400.000-400.000)+(1.100.000-1.100.000)=550.000; \\
V(a_2) &= SR(a_2); \\
&= (-50.000-(-50.000))+(400.000-100.000)+(1.100.000-300.000)=1.000.000; \\
V(a_3) &= SR(a_3); \\
&= (-50.000-(-400.000))+(400.000-200.000)+(1.100.000-700.000)=950.000; \\
V(a_4) &= SR(a_4); \\
&= (-50.000-(-100.000))+(400.000-300.000)+(1.100.000-800.000)=450.000;
\end{aligned}$$

On a : $\min\{550.000, 1.000.000, 950.000, 450.000\} = 450.000$, il en résulte de ce critère que c'est l'action a_4 qu'il faut choisir, i.e. $a^* = a_4$.

2.6 Le critère d'HURWICZ

Les deux critères (SAVAGE et WALD) ont un caractère commun : celui d'être associé à l'idée que la nature est fondamentalement hostile au décideur. C'est cette idée que HURWICZ remet en cause, en introduisant la possibilité d'une nature plus clémente à l'égard du décideur. Le critère d'HURWICZ défini un degré d'optimisme (α) et un degré de pessimisme $(1-\alpha)$. Concrètement le critère qu'il propose HURWICZ consiste à calculer pour chacune des stratégies une moyenne pondérée H du pire et du meilleur de ses résultats potentiels, et à choisir l'action pour laquelle H est la plus grande, c'est à dire on a :

Fonction de valorisation :

$$V(a_j) = H(a_j) = (1-\alpha)m + \alpha M = (1-\alpha)\inf_{e_i} R_{a_j,e_i} + \alpha \sup_{e_i} R_{a_j,e_i};$$

avec :

m : le pire des résultats ;
M : le meilleur des résultats ;
α : est un coefficient compris entre 0 et 1, traduisant le degré d'optimisme du décideur.

Critère de choix :

On a :

$$a_k \succ a_l \Leftrightarrow H(a_k) > H(a_l)$$

d'où :

$$a^* \in arg\ \max\ H(a_j).$$

Exemple :
On reprend notre exemple introductif, on aura :

$$\begin{aligned}
V(a_1) &= H(a_1) = (1-\alpha)(-600.000) + \alpha 1.100.000 = 1.700.000\alpha - 600.000; \\
V(a_2) &= H(a_2) = (1-\alpha)(-50.000) + \alpha 300.000 = 350.000\alpha - 50.000; \\
V(a_3) &= H(a_3) = (1-\alpha)(-400.000) + \alpha 700.000 = 1.100.000\alpha - 400.000; \\
V(a_4) &= H(a_4) = (1-\alpha)(-100.000) + \alpha 800.000 = 900.000\alpha - 100.000;
\end{aligned}$$

Comparaison de a_1 et a_2 :
$H(a_1) > H(a_2) \Leftrightarrow 1.700.000\alpha - 600.000 > 350.000\alpha - 50.000 \Leftrightarrow \alpha > \frac{11}{27}$.
Comparaison de a_1 et a_3 :
$H(a_1) > H(a_3) \Leftrightarrow 1.700.000\alpha - 600.000 > 1.100.000\alpha - 400.000 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}$.
Comparaison de a_1 et a_4 :
$H(a_1) > H(a_3) \Leftrightarrow 1.700.000\alpha - 600.000 > 900.000\alpha - 100.000 \Leftrightarrow \alpha > \frac{5}{8}$.
Comparaison de a_3 et a_2 :
$H(a_3) > H(a_2) \Leftrightarrow 1.100.000\alpha - 400.000 > 350.000\alpha - 50.000 \Leftrightarrow \alpha > \frac{7}{8}$.
Comparaison de a_4 et a_2 :
$H(a_4) > H(a_2) \Leftrightarrow 900.000\alpha - 100.000 > 350.000\alpha - 50.000 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{11}$.
Comparaison de a_3 et a_4 :
$H(a_3) > H(a_4) \Leftrightarrow 1.100.000\alpha - 400.000 > 900.000\alpha - 100.000 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{2}$.
Le choix dépendra étroitement du niveau d'optimisme α. Ainsi, si on suppose que $\alpha = \frac{1}{4}$ alors :

$$\begin{aligned}
H(a_1) &= 1.700.000(\frac{1}{4}) - 600.000 = -175.000; \\
H(a_2) &= 350.000(\frac{1}{4}) - 50.000 = 375.000; \\
H(a_3) &= 1.100.000(\frac{1}{4}) - 400.000 = -125.000; \\
H(a_4) &= 900.000(\frac{1}{4}) - 100.000 = 125.000.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Big(H(a_2) > H(a_4) > H(a_3) > H(a_1)\Big) \Rightarrow \Big(a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1\Big) \Rightarrow a^* = a_2.$$

Remarque 2.1.

- *Ce critère d'HURWITZ est une généralisation du choix d'un agent qui ne serait ni complètement optimiste, ni complètement pessimiste.*
  Si $\alpha = 0$, l'agent est résolument pessimiste ; mais si $\alpha = 1$, l'agent est résolument optimiste.
- *Pour ce critère l'agent doit connaître son degré d'optimisme α. Il peut être déterminé par des spécialistes avec des tests psychologiques.*

- *Lorsque $\alpha = 0$, le critère d'HURWITZ se confond avec le critère de WALD : la meilleure action est alors a_2 i.e. "le lancement de la campagne publicitaire".*
- *Lorsque $\alpha = 1$, il conduit le décideur à ne prendre en considération que le meilleur des résultats potentiels (à cette éventualité correspondrait un optimisme à toute épreuve du décideur) et le choix de l'action a_1, i.e. "lancement d'un produit nouveau".*
- *Si par contre, $\alpha = 0.5$ i.e. le décideur n'est ni trop optimiste ni trop pessimiste, alors :*

$$H(a_j) = (1 - 0.5)m + 0.5M = 0.5(m + M);$$

donc :

$$\begin{aligned} H(a_1) &= 0.5(m + M) = 0.5(-600.000 + 1.100.000) = 250.000; \\ H(a_2) &= 0.5(m + M) = 0.5(-50.000 + 300.000) = 125.000; \\ H(a_3) &= 0.5(m + M) = 0.5(-400.000 + 700.000) = 100.000; \\ H(a_4) &= 0.5(m + M) = 0.5(-100.000 + 700.000) = 300.000; \end{aligned}$$

$Max\{H(a_1), H(a_2), H(a_3), H(a_4)\} = H(a_4) = 300.000 \Rightarrow a^* = a_4$. *Donc, le meilleur choix est alors l'action a_4, i.e. le même résultat obtenu avec le critère de LAPLACE, correspondant à "une baisse de prix".*
- *Il y'a des ouvrages et des cours sur le net où la fonction de valorisation du critère HURWITZ est donnée par :*

$$V(a_j) = H(a_j) = \alpha m + (1 - \alpha)M;$$

*alors, il faut faire attention, ici le α est le degré du **pessimisme** du décideur et non son degré **l'optimisme**.*

2.7 Le critère MOYENNE-VARIABILITE

On sait tous que la moyenne est un critère de position donc quand on évalue chaque action d'un problème de décision par le biais de sa moyenne, nous ne tenons pas compte de son caractère variable (aléatoire).

Exemple : Supposons que je vous donne la moyenne générale de vos notes l'examen du module "Economie de l'incertain et théorie de risque" que j'ai évaluée à 10. Sachant que votre section est de 240 étudiants, est ce que vous serez ravies de cette nouvelle ? Autrement dit, est ce vous allez dire que vos résultats sont bons dans ce module ?

Bien sûr, la réponse à cette question ne peut pas être affirmative sans donner d'autres informations. En effet, comme on l'a déjà dit, la moyenne est un critère de position, elle ne tient pas compte du caractère aléatoire de vos notes. Donc, on peut avoir par exemple une situation où la moitié de votre section i.e. 120 étudiants ont eu des 20 et l'autre moitié ont eu des 0, ce qui donne une moyenne de 10. Cependant, dans ce cas le niveau de la section n'est pas bon, puisque la moitié de son effectif a eu des notes nulles. Il est à signaler que dans ce cas, la dispersion de vos notes est très grande, elle est d'ordre 20-0=20. Bien sûr, on peut avoir une situation, disant que je préférerai en ton votre enseignante, celle où tout le monde a un 10, donc la moyenne vaut 10 et il n'y a pas de dispersion dans vos notes, donc le niveau de la section dans ce cas est vraiment moyen.

Ce critère de MOYENNE-VARIABILITE tient compte de ce caractère aléatoire on introduisant la variabilité mesurant l'écart entre le meilleur et le pire résultat. C'est pour cela que chaque action est caractérisée dans ce critère par un couple composé de sa moyenne et sa variabilité. Ainsi :

Fonction de valorisation :

La fonction de valorisation est caractérisée par le couple $(moy(a_j), \Delta(a_j))$ défini par :

$$\begin{aligned} moy(a_j) &= \frac{1}{n}\sum_{e_1}^{e_n} R_{a_j,e_i}; \\ \Delta(a_j) &= \sup_{e_i} R_{a_j,e_i} - \inf_{e_i} R_{a_j,e_i}. \end{aligned}$$

Critère de choix n° 1 :

$$a_k \succ a_l \text{ si } \begin{cases} moy(a_k) \geqslant moy(a_l) \text{ et } \Delta(a_k) < \Delta(a_l); \\ \qquad\quad \text{ou bien} \\ moy(a_k) > moy(a_l) \text{ et } \Delta(a_k) \leq \Delta(a_l). \end{cases}$$

Ce premier critère est assez restrictif. En effet, selon ce critère le décideur apprécie une action à forte moyenne et à variabilité faible. Cependant, il ne prend pas en considération le fait qu'une forte variabilité compensée par une forte moyenne puisse être intéressante. Donc ce critère ne fonctionne pas toujours : il faut le compléter. Ainsi, si ce critère n°1 ne permettait pas de se prononcer, on utiliserait le critère de choix n° 2 ou n°3 qui seront définis par la suite.

Exemple :

Appliquons ce premier critère de choix à notre exemple introductif. On a :

$$\begin{aligned} moy(a_1) &= 300.000; & \Delta(a_1) &= 1.100.000 - (-600.000) = 1.700.000; \\ moy(a_2) &= 116.667; & \Delta(a_2) &= 300.000 - (-50.000) = 350.000; \\ moy(a_3) &= 166.660; & \Delta(a_3) &= 700.000 - (-400.000) = 1.000.000; \\ moy(a_4) &= 333.333; & \Delta(a_4) &= 800.000 - (-100.000) = 700.000; \end{aligned}$$

On va comparer les actions deux à deux. Ainsi, pour chaque action, nous calculons le couple (moyenne, variabilité) :

$$\begin{aligned} moy(a_1) &> moy(a_2) \text{ et } \Delta(a_1) > \Delta(a_2) \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure;} \\ moy(a_1) &> moy(a_3) \text{ et } \Delta(a_1) > \Delta(a_3) \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure;} \\ moy(a_4) &> moy(a_1) \text{ et } \Delta(a_4) < \Delta(a_1) \Rightarrow a_4 \succ a_1; \\ moy(a_3) &> moy(a_2) \text{ et } \Delta(a_3) > \Delta(a_2) \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure;} \\ moy(a_4) &> moy(a_2) \text{ et } \Delta(a_4) > \Delta(a_1) \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure;} \\ moy(a_4) &> moy(a_3) \text{ et } \Delta(a_4) < \Delta(a_3) \Rightarrow a_4 \succ a_3. \end{aligned}$$

On remarque que cette première règle permet de classer a_4 et a_1, ansi que a_4 et a_3, en effet on a $a_4 \succ a_1$ et $a_4 \succ a_3$. Cependant pour classer le reste des autres actions on devra faire appel aux autres critères de la MOYENNE-VARIABILITE, à savoir les critères n°2 et n°3 suivants :

Critère de choix n° 2 :

Cette règle consiste à mesurer le pourcentage de moyenne par unité de variabilité. La meilleur action sera celle qui aura la plus grande moyenne par unité de variabilité, c'est à dire :

$$a_k \succ a_l \text{ si } \frac{moy(a_k)}{\Delta(a_k)} > \frac{moy(a_l)}{\Delta(a_l)};$$

Exemple : On va essayer de classer le reste des autres actions de notre exemple introductif, que le critère n°1 n'a pas pu classer.
Comparaison des deux actions a_1 et a_2 :

$$\left[\frac{moy(a_1)}{\Delta(a_1)} = \frac{300.000}{1.700.000} = 0,1764\right] < \left[\frac{moy(a_2)}{\Delta(a_2)} = \frac{116.667}{350.000} = 0,3333\right] \Rightarrow a_2 \succ a_1.$$

Comparaison des deux actions a_1 et a_3 :

$$\left[\frac{moy(a_1)}{\Delta(a_1)} = \frac{300.000}{1.700.000} = 0,1764\right] > \left[\frac{moy(a_3)}{\Delta(a_3)} = \frac{166.660}{1.000.000} = 0,1666\right] \Rightarrow a_1 \succ a_3.$$

Comparaison des deux actions a_3 et a_2 :

$$\left[\frac{moy(a_3)}{\Delta(a_3)} = 0,1666\right] < \left[\frac{moy(a_2)}{\Delta(a_2)} = 0,3333\right] \Rightarrow a_2 \succ a_3.$$

Comparaison des deux actions a_4 et a_2 :

$$\left[\frac{moy(a_4)}{\Delta(a_4)} = \frac{333.333}{700.000} = 0,4761\right] > \left[\frac{moy(a_2)}{\Delta(a_2)} = 0,3333\right] \Rightarrow a_4 \succ a_2.$$

Ce deuxième critère nous a permis de classer les quatre actions. En effet, on a :

$$\Big(a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3\Big) \Rightarrow a^* = a_4.$$

Critère de choix n° 3 :

$$a_k \succ a_l \text{ si } \frac{moy(a_k) - moy(a_l)}{\Delta(a_k) - \Delta(a_l)} > \lambda.$$

Ce critère apporte une notion de déplacement mesuré par le TMS (Taux Marginal de Substitution) entre la moyenne et la variabilité. On peut donc changer d'action à condition que le taux d'échange soit assez élevé.
Rappel : Le TMS correspond pour un panier de biens donné (atemporel ou intertemporel), au taux d'échange maximum entre les deux biens sans que l'utilité du détenteur du panier ne s'en trouve modifié.

Remarque 2.2. *Il faut toujours tester deux actions de telle façon que le numérateur et le dénominateur soient positifs*

Exemple : Toutes les actions de notre exemple introductifs sont classées d'après le deuxième critère de la MOYENNE-VARIABILITE précédent. Cependant, on va essayer d'appliquer ce troisième critère à titre illustratif seulement. Donc on suppose que λ est connu :
Comparaison des deux actions a_1 et a_2 par ce troisième critère : On a :

$$\frac{moy(a_1) - moy(a_2)}{\Delta(a_1) - \Delta(a_2)} = \frac{300.000 - 116.667}{1.700.000 - 350.000} = \frac{183.333}{1.350.000} = 0,135 > \lambda.$$

Comparaison des deux actions a_1 et a_3 par ce troisième critère : On a :

$$\frac{moy(a_1) - moy(a_3)}{\Delta(a_1) - \Delta(a_3)} = \frac{300.000 - 166.660}{1.700.000 - 1.000.000} = \frac{133.340}{700.000} = 0,190 > \lambda.$$

Comparaison des deux actions a_3 et a_2 par ce troisième critère : On a :

$$\frac{moy(a_3) - moy(a_2)}{\Delta(a_3) - \Delta(a_2)} = \frac{166.660 - 116.660}{1.700.000 - 350.000} = \frac{49.993}{650.000} = 0,0769 > \lambda.$$

Comparaison des deux actions a_4 et a_2 par ce troisième critère : On a :

$$\frac{moy(a_4) - moy(a_2)}{\Delta(a_4) - \Delta(a_2)} = \frac{333.333 - 116.660}{700.000 - 350.000} = \frac{216.666}{350.000} = 0,619 > \lambda.$$

D'après le critère n°1 on a $a_4 \succ a_1$ et $a_4 \succ a_3$ et d'après ce critère n°3 on a : $a_1 \succ a_2$ si $\lambda < 0,1358$; $a_1 \succ a_3$ si $\lambda < 0,1904$; $a_3 \succ a_2$ si $\lambda < 0,0769$ et $a_4 \succ a_2$ si $\lambda < 0,619$. Avec un petit schéma on peut conclure que :

$$a^* = \begin{cases} a_4 \text{ si } \lambda < 0,619; \\ a_4 \text{ où } a_2 \text{ si } \lambda = 0,619; \\ a_2 \text{ si } \lambda > 0,619. \end{cases}$$

Lorsque $\lambda = 0,619$ on aura $a_4 \approx a_2$, le choix ne pourrait se faire qu'à pile au face.

2.8 Comparaison des critères pour traiter l'incertitude

Si nous récapitulons les choix opérés par les divers critères qu'on a définis dans ce chapitre sur notre exemple introductif (On a omis le critère HURWICZ puisque l'action optimale choisie par ce critère varie selon le degré d'optimisme et notre exemple a beaucoup de cas à étudier), on aura :

Critères	Actions optimales
LAPLACE	a_4
WALD	a_2
MAXMAX	a_1
SAVAGE	a_4
MOYENNE-VARIABILITE	a_4

Il est aisé de remarquer que le choix dépend étroitement du critère utilisé, d'où une question principale se pose :

Quel critère faut-il retenir ?

surtout qu'on le décideur peut se retrouver face au paradoxe de Condorcet illustré ci après par un exemple.

Exemple illustratif du Paradox de Condorcet : Considérons le classement suivant de quatre actions suivant quatre critères :

Critère \ Action	a_1	a_2	a_3	a_4
Critère 1	$n°1$	$n°2$	$n°3$	$n°4$
Critère 2	$n°2$	$n°3$	$n°4$	$n°1$
Critère 3	$n°3$	$n°4$	$n°1$	$n°2$
Critère 4	$n°4$	$n°1$	$n°2$	$n°3$

On constate que chaque action l'emporte trois fois sur chacune des trois autres. Par conséquent, on ne peut pas en déduire qu'une action parmi les quatre est optimale.
Pour répondre à la question posée et faire face au paradoxe précédent, on peut faire recours aux notions de concordance et de discordance.

Définition 2.1. La concordance mesure le nombre de fois qu'une action est préférée par rapport aux reste des autres actions.

Définition 2.2. La discordance évalue la somme pondérée par le poids attribué aux différents critères par le décideur.

Exemple : Illustrons les deux notions définies précédemment par cet exemple. Soit le tableau, récapitulatif des choix opérés par les six critères de décision (LAPLACE, MAXMAX, WALD, HURWICZ, SAVAGE, MOYENNE-VARIABILITE) dans un problème de décision à quatres actions, suivant :

Critère	Action optimale
$LAPLACE$	a_2
$MAXMAX$	a_3
$WALD$	a_2
$HURWICZ$	a_3
$SAVAGE$	a_2
$MOYENNE-VARIABILITE$	a_2

► La concordance de a_2, dans cet exemple, est égale à 2, alors que celle de a_3 vaut 1, donc il est claire qu'usant de la notion de concordance le décideur optera pour a_2.
► Supposons que le décideur est optimiste, n'aime pas regretter ses choix serait enclin à opter pour les critères (MAXMAX, SAVAGE et MOYENNE-VARIABILITE). Si pour ce décideur le critère de SAVAGE pèse deux fois plus que les deux autres, alors la discordance de l'action a sera donnée par :

$$0,25\Big[Max(a)-Max(a_3)\Big]+0,5\Big[SR(a)-SR(a_2)\Big]+0,25\Big[\Big(moy(a)-\lambda\Delta(a)\Big)-\Big(moy(a_2)-\lambda(a_2)\Big)\Big]$$

Ainsi, l'action a_2 dotée de la plus forte concordance sera retenue comme action optimale par ce décideur si sa discordance n'excède pas un seuil qu'il aurait fixé. Sinon, l'action suivante (celle ayant la plus grande discordance après a_2 i.e. a_3 sera retenue.

Remarque 2.3. *Mentionnons enfin qu'il est facile de bâtir des exemples où les critères divergent de façon radicale. Ainsi avec la matrice de décision :*

Critère ╲ *Action*	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0

le critère de WALD conduit à retenir a_2, le critère du Max Max a_3, le critère de LAPLACE a_1 et le critère de SAVAGE a_4 ! ! !.

2.9 Conclusion

On a remarqué qu'aucun des critères étudiés jusqu'ici n'était pleinement satisfaisant. Vouloir décider dans l'incertain sans se poser la question de la vraisemblance relative des divers états de la nature semble artificiel.

Il convient de noter que les critère de WALD et de MAXMAX sont d'un point de vue informationnel moins exigeants que les autres critères, en ce sens qu'ils requièrent des informations moins élaborées. En effet, la mise en oeuvre des critères de LAPLACE, SAVAGE et HURWICZ exigent une mesure cardinale (qualitative) des conséquences des actions. Le critère de WALD et le critère de MAXMAX en revanche peuvent se contenter d'une mesure ordinale (qualitative).

Remarque 2.4. *En avenir incertain, si l'agent se retrouve devant un adversaire rationnel i.e. à la place des états de la nature, on trouves les actions de l'adversaire alors on sera en face d'un problème de la "théorie des jeux". Ainsi, la théorie des jeux est l'étude des modèles de prise de décisions en avenir incertain non probabilisables.*

Chapitre 3

Les critères de décision en univers mesurable (univers risqué)

3.1 Introduction

Il est très difficile de choisir un critère pour décider dans l'incertain. Dans la réalité, il est rare qu'on n'ait absolument aucune information sur les probabilités des états de la nature, donc il vaut mieux se contenter d'évaluation imparfaites de telles probabilités plutôt que de considérer un environnement totalement incertain. Ainsi, les individus sont souvent capables d'établir, avec degrés divers d'assurance, des anticipations sur des classes de vraisemblance sur la probabilité des états. On peut définir une typologie de l'incertitude selon des classes de vraisemblance sur la probabilité des états. Diverses méthodes tentent de donner une représentation numérique de l'incertitude conduisant à une typologie de l'incertitude :

1. Les probabilités objectives

Les probabilités objectives d'un événement ne sont pas liées aux décideurs, mais elles sont dues ou justifiées par :

- des éléments de symétrie (cas par exemple d'une pièce de monnaie, tirage aveugle dans une urne, etc) justifient la détermination de la probabilité d'un tirage comme le rapport :

$$\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

  (Exemple : le tirage d'un 6 pour un dés à 6 faces parfaitement symétriques est de (1/6)).
- les théorèmes sur les probabilités permettent de déterminer les probabilités d'événement plus complexes (analyse combinatoire).
  (Exemple : la probabilité de tirer deux 6 de suite est de (1/6 x 1/6 = 1/36)).
- les méthodes d'échantillonnage, les sondages d'opinions, les tests statistiques, sont des moyens puissants pour déterminer la probabilité d'événements (contrôle de qualité, élection, etc).

2. Les probabilités subjectives

Les probabilités subjectives d'un décideur relatives à un événement expriment ses croyances vis-à-vis de l'occurrences de cet événement. Ces croyances peuvent résulter :

- soit d'un sentiment personnel qu'il exprime directement.
- soit d'une analyse : décomposition des enchaînements conduisant à tel événement, estimation des probabilités conditionnelles, ...

La valeur que l'on attribue à ces croyances dépend bien sûr de la qualification du décideur dans ce domaine, de son degré d'expertise (souvent un seul expert ne suffit pas).
Enfin, les difficultés liées au traitement des décisions dans l'incertain poussent à l'utilisation de probabilités subjectives avec une réflexion critique sur la qualité de l'évaluation et une analyse de sensibilité permettant de mesurer leur influence sur la valeur du critère de décision.

3.2 Problématique des décisions dans le risque

Dans la décision face au risque, on considère que les probabilités de chaque état $e_i \in E$, où E est l'ensemble des états de la nature, sont connues :

$$p(e_i) = p_{e_i}, \forall i.$$

Si l'action $a_j \in A$ où A est l'ensemble des actions et que e_i se réalise, il en résulte que la conséquence (résultat) $R_{a_j,e_i} \in R$, où R est l'ensemble des conséquences (résultats) sur lequel est définie une fonction d'utilité $u(R_{a_j,e_i})$, une décision est alors une application de E dans R. On peut considérer, par exemple, que l'utilité u correspond aux résultats monétaires de la décision.
Problème : Comment choisir, dans l'ensemble des stratégies (actions) la plus avantageuse, sur la base de l'information disponible (E, R, u) ?
Plusieurs critères sont possibles :

- ► Ceux adapté à des risques peu élevés, tels que le critère de PASCAL (critère de l'espérance mathématique ou espérance mathématique de gain) ;
- ► Lorsque le risque est plus élevé, l'aversion pour le risque doit être considérée et l'on a recours à d'autres critères tels que : Critères de MARKOWITZ, critère BERNOULLI, etc.

3.3 Le critère de PASCAL

BLAIZE PASCAL développa (avec l'aide de PIERRE FERMAT) la théorie des probabilités et proposa une première règle de décision dans l'incertain, celle de la maximisation de l'espérance des gains. Cependant, dans le petit monde des mathématiciens, la pertinence de cette règle fut mise en doute.
Ce critère consiste donc à effectuer une simple espérance mathématique des revenus espérés, associés pour chaque action aux divers états de la nature, puis à retenir l'action dont l'espérance est la plus élevée. En effet, la fonction de valorisation et le critère de choix de ce critère sont donnés comme suit :

Fonction de valorisation :

Évaluer l'espérance mathématique des résultats de chaque action :

$$E(a_j) = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} \left(p_{e_i} R_{a_j,e_i}\right).$$

Critère de choix :

Classer les actions par espérance croissante, puis choisir l'action optimale comme celle dont l'espérance est la plus élevée. i.e :

$$a_k \succ a_l \Leftrightarrow \Big[V(a_k) = E(a_k)\Big] > \Big[V(a_l) = E(a_l)\Big].$$

Donc on a :

$$a^* \in arg\ max\big(E(a_j)\big).$$

Exemple :
Reprenons l'exemple introductif qu'on a considéré. Pour expliquer les critères de décision qu'on étudiera dans ce chapitre, on associe des probabilités (d'une manière subjective) aux états de la nature de cette exemple juste pour l'explication de ces critères. Ainsi, notre matrice d'information deviendra :

Actions \ États	e_1	e_2	e_3
a_1	-600.000	400.000	$1.100.000$
a_2	-50.000	100.000	300.000
a_3	-400.000	200.000	700.000
a_4	-100.000	300.000	800.000
$Prob\{e\}$	$Prob\{e_1\} = 0,25$	$Prob\{e_2\} = 0.5$	$Prob\{e_3\} = 0,25$

On a :

$$\begin{aligned}
E(a_1) &= 0,25 \times (-600.000) + 0,5 \times (400.000) + 0,25 \times (1.100.000) = 325000;\\
E(a_2) &= 0,25 \times (-50.000) + 0,5 \times (100.000) + 0,25 \times (300.000) = 112500;\\
E(a_3) &= 0,25 \times (-400.000) + 0,5 \times (200.000) + 0,25 \times (700.000) = 175000;\\
E(a_4) &= 0,25 \times (-100.000) + 0,5 \times (300.000) + 0,25 \times (800.000) = 325000.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\Big[E(a_1) = E(a_4) > E(a_3) > E(a_2)\Big] \Rightarrow \Big[a_1 \approx a_4 \succ a_3 \succ a_2\Big]$. Ainsi :

$$arg\ max\big(E(a_j)\big) = a^* = a_1 \approx a_4.$$

3.4 Le critère de MARKOWITZ

PASCAL a incorporé la connaissance des probabilité dans la prise de décision d'une manière unidimensionnelle. En effet, il a ignorer la dimension variabilité vue dans le critère MOYENNE-VARIABILITE. MARKOWITZ a voulu incorporé cette variabilité cependant dans le cas de l'univers non mesurable la variabilité a permis de mesurer le risque, mais dans l'univers mesurable la variabilité ne peut pas le faire.
Ceci, peut être expliciter par un simple exemple :
Soit la matrice d'information d'un problème de décision, suivante :

Actions \ Etats	e_1	e_2	e_3
a_1	20	0	10
a_2	10	-10	0
$Prob\{e\}$	$0,5$	$0,25$	$0,25$

Les actions de ce problème possèdent la même variabilité et pourtant elles ne traduisent pas le même niveau de risque puisque ce dernier est lié aux probabilités d'occurrence. D'ailleurs, il est claire que la seconde action est plus risquée. Pour remédier à cet inconvénient, MARKOWITZ introduit une autre mesure pouvant mesurer la dispersion en prenant en compte les probabilités d'occurrences, à savoir la mesure de la variance. Ainsi, pour ce critère, on a :

Fonction de valorisation :

La fonction de valorisation est caractérisée par un couple composé par l'espérance mathématique de l'action et sa variance :

$$\begin{aligned} E(a_j) &= \sum_{e_i=e_1}^{e_n} \left(p_{e_i} R_{a_j,e_i}\right); \\ \sigma^2 &= \sum_{e_i=e_1}^{e_n} p_{e_i} \left(R_{a_j,e_i} - E(a_j)\right)^2. \end{aligned}$$

Critère de choix n° 1 :

$$a_k \succ a_k \text{ si } \begin{cases} moy(a_k) \geqslant moy(a_l) \text{ et } \sigma(a_k) < \sigma(a_l); \\ \qquad \text{ou bien} \\ moy(a_k) > moy(a_l) \text{ et } \sigma(a_k) \leq \sigma(a_l). \end{cases}$$

Comme pour le critère moyenne variabilité cette règle de comparaison est assez restrictive, car elle ne prend pas en considération le fait qu'un fort écart-type puisse être compensé par une forte espérance. Ainsi, ce critère ne fonctionne pas toujours : il faut le compléter. En effet, si le critère précédent ne permettait pas de se prononcer on utiliserait le critère de choix n° 2 ou n°3 qui seront donnés par la suite.
Exemple :
Reprenons notre exemple introductif dans le quel on a associé des probabilités aux états de la nature. On a :

$$\begin{aligned} E(a_1) &= 325000; \\ \sigma(a_1) &= \sqrt{0,25 \times (-600.000 - 325000)^2 + 0,5 \times (400.000 - 325000)^2 + 0,25 \times (1.100.000 - 325000)^2}; \\ &= 463774.1859; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(a_2) &= 112500; \\ \sigma(a_2) &= \sqrt{0,25 \times (-50.000 - 112500)^2 + 0,5 \times (100.000 - 112500)^2 + 0,25 \times (300.000 - 112500)^2}; \\ &= 133463.4782; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(a_3) &= 175000; \\ \sigma(a_3) &= \sqrt{0,25 \times (-400.000 - 175000)^2 + 0,5 \times (200.000 - 175000)^2 + 0,25 \times (700.000 - 175000)^2}; \\ &= 304756.7458; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(a_4) &= 325000; \\ \sigma(a_4) &= \sqrt{0,25 \times (-100.000 - 325000)^2 + 0,5 \times (300.000 - 325000)^2 + 0,25 \times (800.000 - 325000)^2}; \\ &= 256429.5973. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} E(a_1) & = E(a_4); \\ \sigma(a_1) & > \sigma(a_4); \end{cases} \Rightarrow a_4 \succ a_1.$$

$$\begin{cases} E(a_1) & > E(a_3); \\ \sigma(a_1) & > \sigma(a_3); \end{cases} \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure.}$$

$$\begin{cases} E(a_1) & > E(a_2); \\ \sigma(a_1) & > \sigma(a_2); \end{cases} \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure.}$$

$$\begin{cases} E(a_2) & < E(a_3); \\ \sigma(a_2) & < \sigma(a_3); \end{cases} \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure.}$$

$$\begin{cases} E(a_4) & > E(a_2); \\ \sigma(a_4) & > \sigma(a_2). \end{cases} \Rightarrow \text{ on ne peut rien conclure.}$$

$$\begin{cases} E(a_4) & > E(a_4); \\ \sigma(a_4) & < \sigma(a_3). \end{cases} \Rightarrow a_4 \succ a_3.$$

Ce critère de choix n° 1 ne permet pas de se prononcer sur l'action optimale, il nous a seulement de classer quelques une des quatres actions. A savoir $a_4 \succ a_1$; $a_4 \succ a_3$ et $a_2 \succ a_3$. Donc, on essayera d'appliquer le critère de choix n° 2.

Critère de choix n° 2 :

$$a_k \succ a_l \text{ si } \frac{E(a_k)}{\sigma(a_k)} > \frac{E(a_l)}{\sigma(a_l)}.$$

Cette règle consiste à mesurer le pourcentage d'espérance par unité d'écart type. La meilleur stratégie sera celle qui aura la plus grande espérance par unité d'écart type.

Exemple :

Reprenons notre exemple introductif dans le quel on a associé des probabilités aux états de la natures. On a :

$$\frac{E(a_1)}{\sigma(a_1)} = 0.7007; \quad \frac{E(a_2)}{\sigma(a_2)} = 0.8429; \quad \frac{E(a_3)}{\sigma(a_3)} = 0.5742; \frac{E(a_4)}{\sigma(a_4)} = 1.2674.$$

Ainsi : $\frac{E(a_4)}{\sigma(a_4)} > \frac{E(a_2)}{\sigma(a_2)} > \frac{E(a_1)}{\sigma(a_1)} > \frac{E(a_3)}{\sigma(a_3)}$. D'où : $a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3 \Rightarrow a^* = a_4$.

Critère de choix n° 3 :

$$a_k \succ a_l \text{ si } \frac{moy(a_k) - moy(a_l)}{\sigma(a_k) - \sigma(a_l)} > \lambda.$$

Cette règle apporte une notion de déplacement mesurée par le Taux Marginal de Substitution entre l'espérance et l'écart type. Donc, on peut changer de stratégie à condition que le taux d'échange soit assez élevé.

Remarque 3.1.
► *Il faut toujours tester deux actions de telle façon que le numérateur et le dénominateur soient positifs ;*
► *Trouver la solution optimale par ce dernier critère revient à résoudre le problème d'optimisation :*

$$\max_{a_j \in A} E(a_j) - \lambda\sigma(a_j).$$

3.5 Les limites de l'espérance de gain et le critère de BERNOULLI

BERNOULLI a critiqué le critère de PASCAL à partir de l'exemple connu sous le nom "Paradoxe de Saint-Pétersbourg" ce paradox stipule que :
Un mendiant possède un billet de loterie lui permettant de gagner 20.000 Ducats avec une probabilité égale à 0,5. Un riche marchand lui propose d'acheter ce billet 9.000 Ducats, le mendiant accepte.
Le fait que le mendiant ait accepté est contraire au paradigme de PASCAL. En effet, on a la matrice d'information relative à cet exemple est la suivante :

$Action\ Etat$	e_1	e_2
a_1	0	20.000
a_2	9.000	9.000
$Prob\{e_i\}$	$0,5$	$0,5$

où a_1 : le mendiant n'accepte de vendre son billet; a_2 : le mendiant accepte de vendre son billet; e_2 : le billet est gagnant, e_1 : le billet est non gagnant. En raisonnant suivant le critère de PASCAL, on aura :

$$E(a_1) = 0,5 \times 0 + 0,5 \times 20.000 = 10.000; E(a_2) = 0,5 \times 9.000 + 0,5 \times 9.000 = 9.000;$$

D'où : $a^* = a_1$. La question qui se pose alors :

Pourquoi le mendiant préfère vendre son billet de loterie ?

Daniel BERNOULLI a résolu ce paradoxe de la manière suivante :
« **La détermination de la valeur d'un objet peut ne pas être basée sur son prix, mais plutôt sur l'utilité qu'il apporte. Il ne fait aucun doute que le gain d'un millier de Ducats est plus important pour un homme pauvre que pour un homme riche, même si les deux obtiennent la même somme**».
BERNOULLI a ainsi introduit la notion d'utilité marginale. Notons cependant que le concept d'utilité cardinale de BERNOULLI repose sur une hypothèse forte : il est possible de comparer les utilités d'individus différents.
Ainsi, le critère de BERNOULLI repose sur :

Fonction de valorisation :

Évaluer l'espérance mathématique de l'utilité de chaque action :

$$E\big(u(a_j)\big) = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} p_{e_i} u\big(R_{a_j,e_i}\big).$$

Critère de choix :

Classer les actions par espérance d'utilité croissante, puis choisir l'action optimale comme celle dont l'espérance mathématique de l'utilité est la plus élevée, i.e. :

$$a_k \succ a_l \Leftrightarrow \Big(V(a_k) = E\big(u(a_k)\big)\Big) > \Big(V(a_l) = E\big(u(a_l)\big)\Big).$$

Donc on a :

$$a^* \in arg\ max\ \Big(E(u(a_j))\Big).$$

Suivant ce critère de BERNOULLI, la réponse du mendiant sera rationnelle puisqu'il acceptera de vendre son billet de loterie dès lors que :

$$E(u(a_2)) > E(u(a_1));$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(9.000) + \frac{1}{2}u(9.000) &> \frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}u(20.000); \\ u(9.000) &> \frac{1}{2}u(20.000); \\ 2u(9.000) &> u(20.000); \end{aligned}$$

Donc, si la fonction d'utilité du mendiant est de type $u(x) = Ln(x)$, il est rationnel d'accepter l'échange, car on a :

$$\Big[2\ln(9.000) = 18,20\Big] > \Big[\ln(20.000) = 9,9\Big].$$

Cependant, le critère de BERNOULLI a été pris en défaut à l'aide de l'exemple suivant :
Exemple :
On suppose qu'on joue à pile ou face : si l'on obtient «face» on gagne 2 euros et on a le droit de rejouer. Si l'on obtient «pile» on ne gagne rien et le jeux s'arrête. Si on a le droit de jouer un deuxième coup et qu'on obtient de nouveau «face» le gain précédent est multiplier par deux. Si on tire «pile», le jeux s'arrête et ainsi de suite. La question qu'on se pose est :

Combien êtes vous prêt à payer pour jouer à ce jeux ?

Profil des gains attendus :

$$\text{gain}= \begin{cases} 2 \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2}; \\ 2^2 \text{ avec une probabilité } (\frac{1}{2})^2; \\ \vdots \\ 2^n \text{ avec une probabilité } (\frac{1}{2})^n; \\ \vdots \end{cases}$$

Avec le critère de PASCAL on obtient :

$$E(\text{gain}) = (\frac{1}{2})2 + (\frac{1}{2})^2 2^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^n 2^n + \cdots = +\infty.$$

Comme cette espérance de gain est infinie, on accepte de payer une somme exorbitante pour jouer à ce jeux. Cependant avec le critère de BERNOULLI, si on prend la fonction d'utilité $u(x) = \ln(x)$ on obtient :

$$\begin{aligned} E(u(\text{gain})) = E(\ln(\text{gain})) &= \frac{1}{2}\ln 2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 \ln\big(2^2\big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \ln\big(2^n\big) + \cdots; \\ &= \frac{1}{2}\ln 2\Big(1 + 2\Big(\frac{1}{2}\Big) + 3\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \cdots + n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \cdots\Big); \\ &= \ln(4) = u(4). \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de BERNOULLI, si votre fonction d'utilité est logarithmique, vous ne miserez que maximum 4 euros pour jouer à ce jeux. Cependant, si le profil des gains attendus est le suivant :

$$\text{gain} = \begin{cases} e^2 \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2}; \\ e^{2^2} \text{ avec une probabilité } (\frac{1}{2})^2; \\ \vdots \\ e^{2^n} \text{ avec une probabilité } (\frac{1}{2})^n; \\ \vdots \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned} E(u(\text{gain})) = E(\ln(\text{gain})) &= \frac{1}{2}\ln e^2 + (\frac{1}{2})^2 \ln\big(e^{2^2}\big) + \cdots + (\frac{1}{2})^n \ln\big(e^{2^n}\big) + \cdots; \\ &= \frac{1}{2}\ln e^2\Big[1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + n(\frac{1}{2})^{n-1} + \cdots\Big] = +\infty. \end{aligned}$$

Avec ce nouveau profil des gains, on a l'espérance de l'utilité du gain est infinie donc on accepte de payer une somme exorbitante pour jouer à ce jeux. Ainsi, le critère de BERNOULLI est pris en défaut. Ce critère de BERNOULLI a été par la suite critiqué par plusieurs autres auteurs en particulier par ALFRED MARSHALL car pour lui ce critère ne prend pas en considération les individus ayant une fonction d'utilité convexe. Néanmoins, ce critère sera généralisé par la suite grâce aux travaux de JOHN VON NEUMANN et MORGENSTERN pour donner lieu à la fonction d'utilité de la richesse. Cette généralisation du critère de BERNOULLI fera l'objet du chapitre 5 suivant.

Remarque 3.2. *Vous remarquez qu'on n'a pas appliquer le critère de BERNOULLI sur notre exemple introductif. Ceci est dû au fait que la fonction logarithmique considérée initialement par BERNOULLI ne peut pas être définie sur les résultats de cet exemple puisque une partie de ces résultats sont négatifs. Donc, si nous voulons prendre notre exemple introductif comme exemple illustratif il faut choisir une autre fonction d'utilité.*

Remarque 3.3. *En avenir risqué, si l'agent se retrouve devant un adversaire rationnel i.e. à la place des états de la nature, on trouves les actions de l'adversaire alors on sera en face d'un problème de la "théorie de la décision" (appelée aussi parfois "analyse décisionnelle"). Cette dernière est l'étude des modèles de prise de décisions en avenir incertain probabilisables (objectivement ou subjectivement).*

3.6 Conclusion

En conclusion de ces deux derniers chapitres, aucune méthode précise ne peut aider le décideur à prendre sa décision de façon efficace et rationnelle, mais avec la révolution technologique dans le domaine de l'informatique il peut être conduit à trouver des méthodes récentes fondées sur l'informatisation des systèmes d'informations : ces méthodes sont capables d'une façon ou d'une autre de réduire le degré de l'incertitude afin que le décideur puisse faire face à des situations complexes et fluctuantes. Ainsi, dans le chapitre suivant, on va vous initialiser à la notion d'acquisition d'informations et révision des croyances.

Chapitre 4

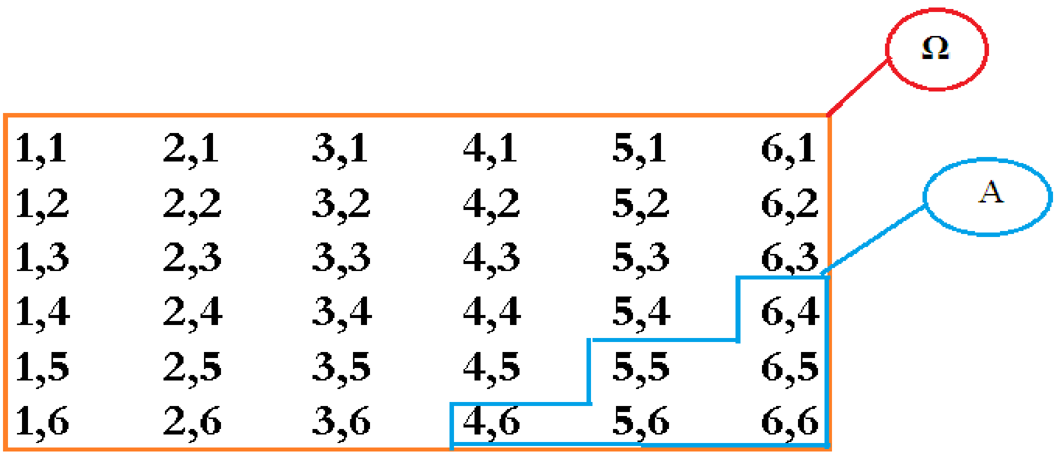
Acquisition d'informations et révision des croyances

4.1 Introduction

On appelle révision des croyances, le processus par lequel un agent incertain incorpore l'information qu'il reçoit et modifie ses croyances. Que les croyances soient déterminantes dans la prise de décision en situation d'incertitude est une idée ancienne en économie mais abordée de manière différente. Pendant longtemps, l'économie a procédé en partant de l'idée du choix rationnel pour en déduire la forme et les propriétés des croyances. Plus récemment, l'économie s'est engagée dans l'étude empirique des croyances et leur rôle dans les décisions économiques.

4.2 Exemple illustratif sur la révision des croyances après l'acquisition d'informations

Considérons le jeux suivant : On lance deux dès et on gagne N fois sa mise dès lors que la somme des chiffres des deux dès est égale ou supérieur à 10. L'univers de ce jeu est donné par :



$$\Omega = \Big\{(x, y)/x \text{ et } y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\Big\}.$$

L'événement favorable de ce jeux est le suivant :

$$A = \Big\{(x, y) \in \Omega / x + y \geq 10\Big\}.$$

On a $|\Omega| = 36$ et $|A| = 6$. Ainsi, la probabilité de gagner à ce jeux est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombres de cas possibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

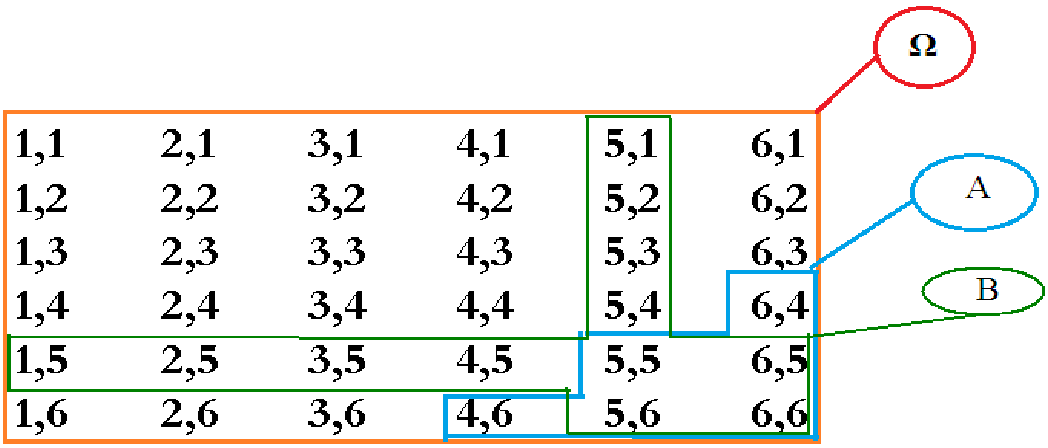
On participera à ce jeux si et seulement si :

$$\left[\frac{1}{6}(N \times mise - mise) + \frac{5}{6}(-mise) > 0\right] \Leftrightarrow N > 6.$$

Supposons que nous avons l'information suivante "le numéro 5 est apparu", alors que deviendrait la condition pour qu'on puisse participer à ce jeux en ayant cette information en plus.
Rappel (Règle de BAYES) : La probabilité conditionnelle que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé est donnée par :

$$\mathbf{P(A/B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}.$$

On a :



L'information qu'on a, peut être caractérisée par l'ensemble $B = \{(x, y) \in \Omega / x = 5 \; ou \; y = 5\}$. Par conséquent, la probabilité de gagner à ce jeu devra se prendre en fonction de cette nouvelle information. Ansi, la probabilité de gagner sera donnée par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3}{11}.$$

Donc, après acquisition de l'information donnée, on participera à ce jeu s et seulement si :

$$\left[\frac{3}{11}(N \times mise - mise) + \frac{8}{11}(-mise) > 0\right] \Leftrightarrow N > \frac{11}{3}.$$

Cet exemple illustratif nous enseigne que dans un problème de décision, l'acquisition d'une information supplémentaire peut modifier la décision. En effet, l'acquisition d'information effectuée par le billet de B nous a fait révisé nos croyances, puisque avant le gain devait être au moins égal à la mise multipliée par 6, après il ne devait plus être au moins multipliés par $\frac{11}{3} \backsimeq 3,67$.

4.3 La valeur espérée de l'information parfaite

Soit a^* l'action optimale obtenue à l'aide du critère de SAVAGE en avenir mesurable (on peut aussi utiliser le critère de PASCAL tout simplement). Ainsi, pour déterminer la valeur espérée de l'information parfaite ($VEIP$), on utilisera le critère de SAVAGE en avenir mesurable. C'est à dire, nous allons évaluer l'espérance du gain supplémentaire que l'on peut obtenir en comparant les résultats de l'action choisie à priori et le résultat de l'action que l'on aurait choisie à posteriori c'est à dire en connaissant l'état de la nature qui s'est réalisé. Formellement, ceci revient à évaluer l'espérance mathématique du regret quand l'état de la nature est avéré. Donc, $VEIP$ est donnée par :

$$VEIP = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} p_{e_i}\left(\sup_{a_j}\left(R_{a_j,e_i}\right) - R_{a^*,e_i}\right) = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} p_{e_i} Regret(a^*, e_i).$$

où $Regret(a^*, e_i)$ est le regret sous l'état e_i, lorsque la décision optimale est a^*.
Ainsi, à priori, le décideur est prêt à payer pour connaître l'état de la nature qui va se réaliser. Par ailleurs, une information supplémentaire peut avoir une valeur qui dépend du gain supplémentaire que l'on peut en retirer.
Exemple : On va pas reprendre notre exemple introductif ici car la matrice d'information de cet exemple est d'ordre (4×3) et les valeurs de ces éléments sont assez grand, ainsi le calcule de la formule de VEIP sera assez longue. Donc, on va essayer de prendre un exemple avec une matrice d'information assez réduite avec des éléments ayant des valeurs assez petites.
Considérons la matrice d'information simple suivante d'un problème de décision et calculons la valeur de l'information parfaite.

Actions \ Etats	e_1	e_2
a_1	15	10
a_2	10	12
a_1	8	20

• Calculons d'abord l'action optimale suivant le critère de PASCAL. On a :

$$\begin{aligned} E(a_1) &= 0,8 \times 15 + 0,2 \times 10 = 14; \\ E(a_2) &= 0,8 \times 10 + 0,2 \times 12 = 10,4; \\ E(a_3) &= 0,8 \times 8 + 0,2 \times 20 = 10,4; \end{aligned}$$

d'où $a^* = a_1$.
• On calcul maintenant la valeur de l'information parfaite :

$$VEIP = \sum_{e_1}^{e_n} p_{e_i}\left(\sup_{a_j}\left(R_{a_j,e_i}\right) - R_{a^*,e_i}\right) = 0,8(15-15) + 0,2(20-10) = 2.$$

La connaissance de la réalisation de l'état de la nature permet de gagner un gain supplémentaire moyen de 2. Donc un individu est prêt à payer jusqu'à 2 unité monétaire pour connaître l'état de la nature qui va se réaliser.

4.4 Système d'informations

Considérons k indicateurs d'informations $I_1, I_2, \ldots, I_k$ tels que les probabilités suivantes soient connues (i.e. la probabilité d'avoir eu l'information I_l lorsque l'état de la nature s'est révélé être e_i) :

$$P(I_l/e_i), \forall l = 1, 2, \cdots k; \forall i = 1, 2, \cdots n.$$

Mais, notre intérêt serait de déterminer la probabilité d'avoir l'état de la nature e_i sachant qu'on a l'information I_l, c'est à dire $P(e_j/I_l)$. Ainsi :

$$P(e_i/I_l) = \frac{P(e_i \cap I_l)}{P(I_l)} = \frac{P(I_l/e_i)}{P(I_l)} p_{e_i} = \frac{P(I_l/e_i)p_{e_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(I_l/e_i)p_{e_i}}.$$

Ensuite on calculera l'espérance mathématique de chaque action a_j sachant qu'on possède l'information I_l :

$$E(a_j/I_l) = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} P(e_i/I_l) R_{a_j,e_i}.$$

On retiendra pour chaque information I_l l'action qui a la plus forte espérance mathématique. C'est à dire :

$$a^*_{I_l} \in \text{ arg } \max \Big[E(a_j/I_l)\Big].$$

4.5 L'efficience du système d'informations

La Valeur Espérée de l'Information Acquise via le Système d'Informations $\{I_1, I_2, \dots I_k\}$ $(VEIASI)$ est la différence entre l'espérance mathématique du gain obtenu avec le système d'informations et l'espérance mathématique du gain avec une information parfaite. Donc, $VEIASI$ se calcule comme suit :

$$VEIASI = \sum_{I_l=I_1}^{I_k} P(I_l/e_i) E(a^*_{I_l}) - \sum_{e_i=e_1}^{e_n} p_{e_i} \sup_{e_i}(R_{a_j,e_i}).$$

L'efficience du système d'informations nous indique le pourcentage du gain $EVPI$ capturé par l'usage du système d'informations $\{I_1, I_2, \cdots, I_l\}$, donc on a :

$$Efficience = \frac{VEIASI}{VEIP} = \frac{\sum\limits_{I_l=I_1}^{I_k} P(I_l/e_i) E(a^*_{I_l}) - \sum\limits_{e_i=e_1}^{e_n} p_{e_i} \sup\limits_{e_i}(R_{a_j,e_i})}{\sum\limits_{e_i=e_1}^{e_n} p_{e_i} \Big(\sup\limits_{a_j} \left(R_{a_j,e_i}\right) - R_{a^*,e_i} \Big)}$$

Si ce pourcentage (cette efficience) est fort(e), alors il est intéressant d'acquérir cet ensemble d'informations et dans ce cas, les décideurs sont prêts à payer pour connaître l'information. A l'opposé, si cet efficience est faible, alors il sera inutile d'y recourir.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. Supposons que le décideur ait reçu les informations suivantes :

$$P(I/e_1) = 0.2 \text{ et } P(I/e_2) = 0.7.$$

• Déterminons l'action qu'on choisira en ayant cette information.

► Choix d'une action avec le système d'informations I :

1er cas : on a l'information I :

$$P(e_1/I) = \frac{P(e_1 \cap I)}{P(I)} = \frac{P(I/e_1)}{P(I)} p_{e_1} = \frac{P(I/e_1)p_{e_1}}{\sum\limits_{i=1}^{2} P(I/e_i)p_{e_i}} = \frac{0,2 \times 0,8}{0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,75} = \frac{0,16}{0,31} = 0,5161;$$

$$P(e_2/I) = \frac{P(e_2 \cap I)}{P(I)} = \frac{P(I/e_2)}{P(I)} p_{e_2} = \frac{P(I/e_2)p_{e_2}}{\sum\limits_{i=1}^{2} P(I/e_i)p_{e_i}} = \frac{0,2 \times 0,75}{0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,75} = \frac{0,15}{0,31} = 0,483.$$

On a par ailleurs : $E(a_j/I) = \sum_{e_i=e_1}^{e_2} P(e_i/I)R_{a_j,e_i}$, donc :

$$\begin{aligned} E(a_1/I) &= 0,5161 \times 15 + 0,483 \times 10 = 12,55; \\ E(a_2/I) &= 0,5161 \times 10 + 0,483 \times 12 = 10,94; \\ E(a_3/I) &= 0,5161 \times 8 + 0,483 \times 20 = 13,78; \end{aligned}$$

On a : $\max\left\{E(a_1/I), E(a_2/I), E(a_3/I)\right\} = E(a_3/I) \Rightarrow a_I^* = a_3$.

•2ème cas : on n'a pas l'information I : On a :

$$P(\overline{I}/e_1) = 0.8 \text{ et } P(\overline{I}/e_2) = 0.3.$$

Alors :

$$P(e_1/\overline{I}) = \frac{P(e_1 \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(\overline{I}/e_1)}{P(\overline{I})} p_{e_1} = \frac{P(\overline{I}/e_1)p_{e_1}}{\sum_{i=1}^{2} P(\overline{I}/e_i)p_{e_i}} = \frac{0,8 \times 0,8}{0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25} = \frac{0,16}{0,69} = 0,9275;$$

$$P(e_2/\overline{I}) = \frac{P(e_2 \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(\overline{I}/e_2)}{P(\overline{I})} p_{e_2} = \frac{P(\overline{I}/e_2)p_{e_2}}{\sum_{i=1}^{2} P(\overline{I}/e_i)p_{e_i}} = \frac{0,2 \times 0,25}{0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25} = \frac{0,05}{0,69} = 0,072.$$

On a par ailleurs : $E(a_j/\overline{I}) = \sum_{e_i=e_1}^{e_2} P(e_i/\overline{I})R_{a_j,e_i}$, donc :

$$\begin{aligned} E(a_1/\overline{I}) &= 0,9275 \times 15 + 0,072 \times 10 = 14,63; \\ E(a_2/\overline{I}) &= 0,9275 \times 10 + 0,072 \times 12 = 10,14; \\ E(a_3/\overline{I}) &= 0,9275 \times 8 + 0,072 \times 20 = 8,86. \end{aligned}$$

On a : $\max\left\{E(a_1/\overline{I}), E(a_2/\overline{I}), E(a_3/\overline{I})\right\} = E(a_1/\overline{I}) \Rightarrow a_{\overline{I}}^* = a_1$

Donc avec le système d'informations on obtient :

$$a^* = \begin{cases} a_3, \text{ si } I \text{ avec } P(I) = 0,31; \\ a_1, \text{ si } \overline{I} \text{ avec } P(\overline{I}) = 0,69. \end{cases}$$

La valeur de la stratégie qui consiste à choisir a_3 si on a l'information I et a_1 si l'on n'a pas l'information I est donnée par :

$$0,31 \times 13,78 + 0,69 \times 14,63 = 14,3665.$$

Espérance de gain sans système d'informations, obtenue avec le critère de PASCAL, vaut $E(a_1) = 14$ et l'espérance de gain avec système d'informations, vaut 14,3665 ; de plus la valeur de l'information parfaite vaut 2 ; donc l'efficience sera donnée par :

$$\text{Efficience} = \frac{VElASI}{VEIP} = \frac{14,3665 - 14}{2} = 0,18325 = 18,325\%.$$

Exercice 4.1. *(Travail à remettre durant la séance de TD) Reprenez notre exemple introductif et répondez au questions suivantes :*
1- *Quelle est la stratégie optimale en utilisant le critère de PASCAL ?*
2- *Calculez la valeur de l'information parfaite.*
Supposons que le dirigeant de la société ait reçu une lettre de conjonction d'un organisme financer lui fournissant les informations suivantes :

$$\begin{aligned} P(I_1/e_1) &= 0,1; \quad P(I_1/e_2) = 0,2; \;\; \textit{et}\; P(I_1/e_3) = 0,9; \\ P(I_2/e_1) &= 0,9; \quad P(I_2/e_2) = 0,8; \;\; \textit{et}\; P(I_2/e_3) = 0,1. \end{aligned}$$

3- *Quelle action doit-on choisir ?*
4- *Calculer l'efficience de cette information.*

Chapitre 5

Le critère de l'espérance-utilité et l'aversion vis-à-vis du risque

5.1 Introduction

On comprend bien à partir des chapitres précédents que les choix des décideurs dépendent de manière fondamentale de paramètres subjectifs, des préférences et des goûts de ces décideurs, mais elles peuvent aussi dépendre de leur attitude à l'égard du risque. En effet, la valeur qu'un décideur accorde à une action dépend du niveau de risque qu'elle contient et également de la manière dont il est affecté par ce risque. D'où la nécessité de comprendre comment il évalue le risque. Ainsi,un agent qui évalue négativement le risque donnera moins de valeur à un projet risqué qu'une personne neutre vis-à-vis du risque ou qui le considère comme un bienfait. Donc, cet agent sera prêt à payer pour se débarrasser du risque.
La question qui se pose alors, est : peut-on définir rigoureusement, dans le cadre d'un modèle théorique, la notion de risque ?
L'objet de ce chapitre est d'exposer les notions qui ont été développées notamment dans le cadre de l'utilité espérée pour représenter les attitudes des décideurs face aux risque. Donc, dans ce chapitre, nous allons premièrement présenter une généralisation du critère de BERNOULLI grâce à l'axiomatique de VON NEUMAN et MORGENSTERN. Par la suite, on définit l'attitude face au risque, montrer en quoi cette attitude face au risque affecte les décisions des agents.

5.2 Généralisation du critère de BERNOULLI

On définit la fonction d'utilité $u(.)$ (à la place de $\ln$ donnée par BERNOULLI) avec $u'(.) > 0$ et $u''(.) \leq 0$. Cette généralisation du critère de BERNOULLI est proposée par BERNOULLI lui même, mais elle a été axiomatisée par J. VON NEUMANN et O. MORGENSTEN.

5.2.1 Hypothèses pour l'axiomatisation

En considérant l'ensemble des conséquences (résultats) distincts d'un problème de décision, alors cet ensemble est de cardinal fini. On note cet ensemble par

$$C = \{R_{a_1,e_1}, \cdots R_{a_1,e_n}, R_{a_2,e_1} \cdots , R_{a_2,e_n}, \cdots , R_{a_m,e_1}, \cdots , R_{a_m,e_n}\} \Rightarrow |C| < +\infty.$$

On ordonne cet ensemble C et on le note une fois ordonné par :

$$C^* = \{R_1, R_2, \cdots, R_k\} = \{c_1, c_2, \cdots, c_k\} \Rightarrow |C^*| = k.$$

Une fois qu'on aurait défini l'ensemble C^*, il permettra de caractériser chaque action a_j sous la forme d'une loterie dont les résultats éventuels sont tous des éléments de C^* :

$$\forall a_j \in A, \exists p^{a_j} = (p_1^{a_j}, p_2^{a_j}, \cdots, p_k^{a_j}), \text{ tel que : } \begin{cases} p_l^{a_j} \geq 0, \forall l = 1, \cdots k; \\ \sum_{l=1}^{l=k} p_l^{a_j} = 1. \end{cases}$$

$p_l^{a_j}$ est la probabilité que l'action a_j conduise au $l^{\text{ième}}$ résultat de C^*. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble de toutes ces probabilités.
Ainsi, une action a_j peut être caractérisée de la façon suivante :

$$a_j = L(c_1, c_2, \cdots, c_k; p_1^{a_j}, p_2^{a_j}, \cdots, p_k^{a_j});$$

ou tout simplement par :

$$a_j = (C^*, p^{a_j}).$$

Exemple : Soit la matrice d'information suivante :

$Actions \backslash Etats$	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	15	20	35	95
a_2	0	25	45	120
a_3	35	45	70	-5
$p(e_i)$	0, 15	0, 4	0, 25	0, 2

On a :

$$C = \{15, 20, 35, 95, 0, 25, 45, 120, 35, 45, 70, -5\} \Rightarrow |C| = 12.$$

D'où :

$$C^* = \{-5, 0, 15, 20, 25, 35, 45, 70, 95, 120\} \Rightarrow |C^*| = 10.$$

Ainsi, on aura :

$$\begin{aligned} a_1 &= (C^*, p^{a_1}); \\ a_2 &= (C^*, p^{a_2}); \\ a_3 &= (C^*, p^{a_3}); \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} p^{a_1} &= \{0, 0, \mathbf{0.15}, \mathbf{0.4}, 0, \mathbf{0.25}, 0, 0, \mathbf{0.2}, 0\}; \\ p^{a_2} &= \{0, \mathbf{0.15}, 0, 0, \mathbf{0.4}, 0, \mathbf{0.25}, 0, 0, \mathbf{0.2}\}; \\ p^{a_3} &= \{\mathbf{0.2}, 0, 0, 0, 0, \mathbf{0.15}, \mathbf{0.4}, \mathbf{0.25}, 0, 0\}. \end{aligned}$$

On remarque que les loteries ne diffèrent pas par leurs résultats (i.e. C^*) mais diffèrent par les distributions de probabilité p^{a_j}. Donc, on dira que l'action a_k est préférable à l'action a_l si p^{a_k} est préférable à p^{a_l}. Ainsi, le classement des actions est isomorphe au classement des distributions de probabilités $\mathbb{P} = (p^{a_1}, p^{a_2}, \cdots, p^{a_m})$, donc nous allons définir une relation de préférence dans l'ensemble des probabilités $\mathbb{P}$ et exiger à cette relation de vérifier l'axiomatique de Von NEUMANN et MORGENSTERN qu'on va exposé dans la section suivante.

5.2.2 Axiomatique de VON NEUMANN et MORGENSTERN

A$_1$- Axiome de comparabilité

Cet axiome stipule que deux distributions de probabilités pourront toujours être comparables, i.e. :

$$\forall p, q \in \mathbb{P}, \text{ alors soit } p \succeq q \text{ soit } q \succeq p, \text{ soit } q \approx p.$$

D'après cet axiome, le décideur est toujours capable de classer deux loteries.

A$_2$- Axiome de transitivité

Cet axiome traduit une rationalité pure qui induit la cohérence entre les classements.

$$\forall p, q, r, \text{ si } p \succeq q \text{ et } q \succeq r, \text{ alors } p \succeq r.$$

A$_3$- Axiome d'indépendance forte ou de substitution

$$\forall p, q, r \in \mathbb{P}, \forall \alpha \in [0,1], \text{ si } p \succeq q, \text{ alors } \alpha p + (1-\alpha) r \succeq \alpha q + (1-\alpha) r.$$

Cet axiome peut s'interpréter en utilisant les loteries de la façon suivante :

$$\text{si } p \succeq q, \text{ alors } L(p, r; \alpha, (1-\alpha)) \succeq L(q, r; \alpha, (1-\alpha)).$$

Cet axiome stipule que l'attitude d'un individu face aux deux loteries p et q ne devra dépendre que de son attitude face à p et q et non pas de la façon d'obtenir p et$q$.

A$_4$- Axiome de continuité ou d'ARCHIMÈDE

Cet axiome stipule qu'il est toujours possible de construire une combinaison de deux loteries générant la même satisfaction qu'une loterie intermédiaire (en termes de préférences), i.e. :

$$\forall p, q, r, \text{ si } p \succeq q \succeq r, \text{ alors } \exists \alpha, \beta \in [0,1] \text{ tels que : } \big[\alpha p + (1-\alpha) r\big] \succeq \big[\beta \alpha q + (1-\beta) r\big]$$

On connaît tous le principe d'ARCHIMÈDE stipulant que $\forall (n, n') \in \mathbb{N}^2, \exists k \in \mathbb{N} / kn > n'$. L'analogie de cet axiome avec le principe d'ARCHIMÈDE est évidente.

5.2.3 Théorème de V.N.M. (VON NEUMANN & MORGENSTERN)

Supposons que les axiomes A_1, A_2 et A_3 soient satisfaits. Alors il existe une fonction d'utilité $u(.)$ telle que :

$$\forall p, q \in \mathbb{P}, p \succeq q \text{ si et seulement si } E_p u(C) \geq E_q u(C).$$

Ce théorème a été critiquée, notamment à cause de l'axiome d'indépendance (A_3). L'exemple simple suivant prend en défaut ce théorème.

Exemple : Soient les loteries suivantes :

$$A = (500, 0; 0.8, 0.2); \quad B = (600, 0; 1, 0); \quad C = (500, 0; 2.2, 0.8), \quad D = (600, 0; 0.25, 0.75).$$

Supposons :

$$B \succ A \Rightarrow \Big[u(600) > 0.2\, u(500)\Big]. \tag{5.1}$$

Si, (5.1) est vraie, alors pour les loteries C et D, d'après l'axiome A_3, on doit avoir $C \succ D$. Or :

$$C \succ D \Rightarrow \Big[0.2\, u(500) > 0.25\, u(600)\Big] \Rightarrow \Big[0.8\, u(500) > u(600)\Big].$$

Mais ceci est contradictoire avec (5.1).

5.3 L'aversion au risque

Plusieurs définitions existent, certaines en référence à l'utilité de l'espérance, d'autres non, mais un lien entre l'utilité de l'espérance et la définition existe toujours.

5.3.1 Utilité de la richesse

On suppose qu'un individu a une richesse initiale W_0 et détient une loterie $\widetilde{x}$. Sa richesse finale est notée :

$$\widetilde{W_f} = W_0 + \widetilde{x}.$$

L'agent a le choix entre garder $\widetilde{W_f}$ ou obtenir de façon certaine $E(\widetilde{W_f})$.

- Si l'agent préfère obtenir de façon certaine l'espérance de sa richesse finale que la richesse finale, on dit que l'agent est risquophobe. I.e. :

$$\Big[E(\widetilde{W_f}) \succ \widetilde{W_f}\Big] \Leftrightarrow \Big[u\big(E(\widetilde{W_f})\big) > E\big(u(W_f)\big)\Big].$$

- Si l'agent préfère garder sa richesse finale plutôt que d'obtenir de façon certaine l'espérance de sa richesse finale, on dit que l'agent est risquophile. I.e. :

$$\Big[\widetilde{W_f} \succ E(\widetilde{W_f})\Big] \Leftrightarrow \Big[E\big(u(W_f)\big) > u\big(E(\widetilde{W_f})\big)\Big].$$

- Si l'agent est indifférent entre avoir de façon certaine l'espérance de sa richesse finale et sa richesse finale, on dit que l'agent est neutre par rapport au risque. I.e. :

$$\Big[\widetilde{W_f} \approx E(\widetilde{W_f})\Big] \Leftrightarrow \Big[E\big(u(W_f)\big) = u\big(E(\widetilde{W_f})\big)\Big].$$

5.3.2 Implications quant à la forme de la fonction d'utilité

On a les équivalences suivantes :

- Aversion au risque $\Leftrightarrow$ u est concave, i.e. $u''(.) \leq 0$.
- Attirance pour le risque $\Leftrightarrow$ u est convexe, i.e. $u''(.) \geq 0$.
- Neutralité au risque $\Leftrightarrow$ u est affine $u''(.) = 0$.

Exemple : Soit la loterie $\widetilde{x} = L\Big(h, -h; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$. La richesse finale est donc donnée par :

$$\widetilde{W_f} = \Big(W_0 + h, W_0 - h; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

D'après ce qui précède, pour connaître le comportement de l'agent, ayant cette loterie, vis à vis du risque on doit comparer :

$$E\Big(u(\widetilde{W}_f)\Big) = \frac{1}{2}u(W_0+h) + \frac{1}{2}u(W_0-h)$$

avec :

$$u\Big(E(\widetilde{W}_f)\Big) = u\Big(\frac{1}{2}(W_0+h) + \frac{1}{2}(W_0-h)\Big) = u(W_0).$$

Ainsi, trois cas peuvent se présenter suivant la nature de la fonction d'utilité de la richesse $u(W)$:

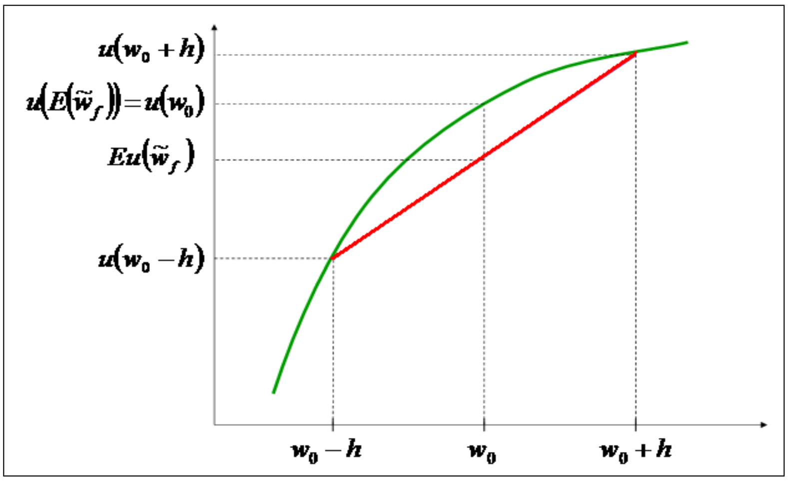


FIG. 5.1 – La fonction $u(W)$ est concave (i.e. Agent risquophobe).

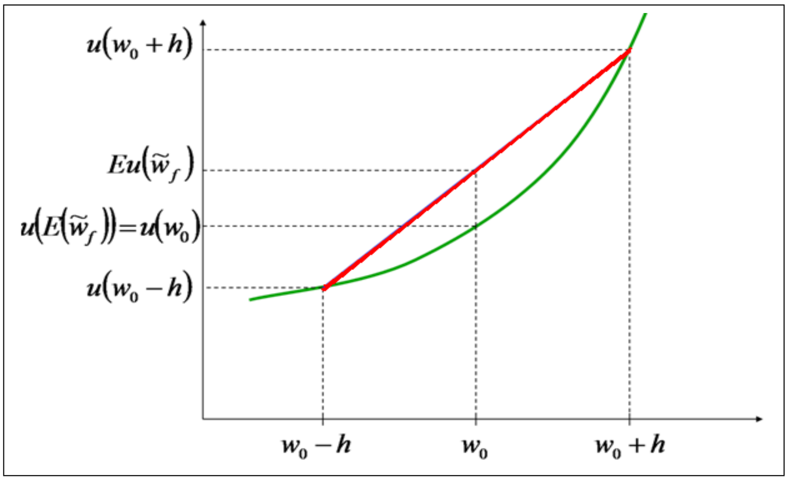


FIG. 5.2 – La fonction $u(W)$ est convexe (i.e. Agent risquophile).

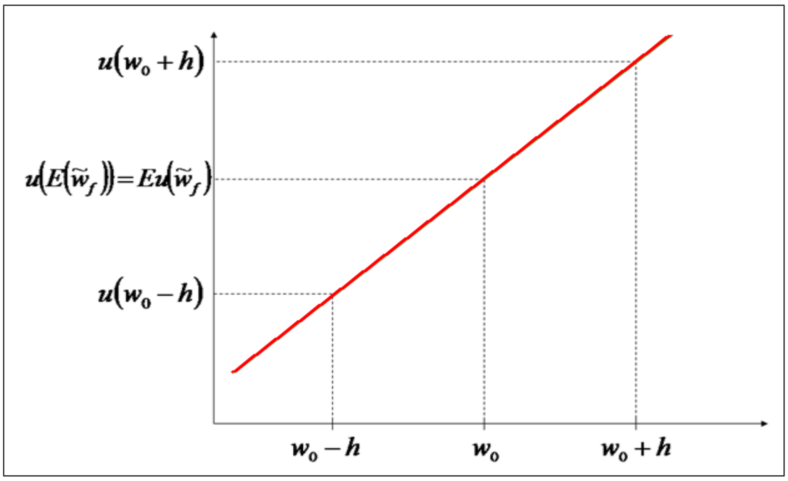


FIG. 5.3 – La fonction $u(W)$ est affine (i.e. Agent neutre vis à vis du risque).

5.3.3 Equivalent certain

Equivalent certain d'une action "a" c'est le montant certain qui laisse l'agent indifférent entre obtenir ce montant ou recevoir le montant aléatoire correspondant à l'action "a". Donc l'équivalent certain est le montant w^* sûr et certain qui procure la même utilité que la richesse finale risquée (i.e. la richesse initiale w_0 et la loterie $\widetilde{x}$). On a donc ;

$$u(W^*) = E\big(u(\widetilde{W}_f)\big) = E\big(u(W_0 + \widetilde{x})\big).$$

5.3.4 La prime de risque

La prime de risque $\Pi(W_0, \widetilde{x})$ indique la quantité de risque qu'un individu perçoit dans la loterie $\widetilde{x}$. Il s'agit donc de la différence entre l'espérance de la loterie et le prix de vente de la loterie.
• **Le prix de vente d'une loterie :** Le prix de vente de la loterie $\widetilde{x}$ est obtenu par la différence entre l'équivalent certain w^* et la richesse initiale w_0. I.e. :

$$P_v(W_0, \widetilde{x}) = W^* - W_0.$$

Ce qui est évident, car se débarrasser de la loterie est équivaut à se priver de $(w^* - w_0)$.
Donc la prime de risque est donnée par :

$$\Pi(W_0, \widetilde{x}) = E(\widetilde{x}) - P_v(W_0, \widetilde{x}).$$

Remarque 5.1.

► $\Pi(W_0, \widetilde{x}) > 0$ *pour un agent risquophobe. En effet,si l'agent est risquophobe on sait que :*

$$E\big(u(W_0 + \widetilde{x})\big) = u(W^*) < u\Big(E\big(W_0 + \widetilde{x}\big)\Big);$$

d'où :

$$W^* < E\big(W_0 + \widetilde{x}\big) = W_0 + E(\widetilde{x});$$

donc :

$$E(\widetilde{x}) - \Big(W^* - W_0\Big) > 0 \Leftrightarrow \Pi(W_0, \widetilde{x}) > 0.$$

- $\Pi(W_0, \widetilde{x}) < 0$ *pour un agent risquophile ; En effet, si l'agent est risquophile on sait que :*

$$E\big(u(W_0 + \widetilde{x})\big) = u(W^*) > u\Big(E\big(W_0 + \widetilde{x}\big)\Big);$$

d'où :

$$W^* > E\big(W_0 + \widetilde{x}\big) = W_0 + E(\widetilde{x});$$

donc :

$$E(\widetilde{x}) - \Big(W^* - W_0\Big) < 0 \Leftrightarrow \Pi(W_0, \widetilde{x}) < 0.$$

- $\Pi(W_0, \widetilde{x}) = 0$ *pour un agent neutre au risque. En effet, si l'agent est neutre vis à vis du risque on sait que :*

$$E\big(u(W_0 + \widetilde{x})\big) = u(W^*) = u\Big(E\big(W_0 + \widetilde{x}\big)\Big);$$

d'où :

$$W^* = E\big(W_0 + \widetilde{x}\big) = W_0 + E(\widetilde{x});$$

donc :

$$E(\widetilde{x}) - \Big(W^* - W_0\Big) = 0 \Leftrightarrow \Pi(W_0, \widetilde{x}) = 0.$$

Remarque 5.2. *On a :*

(Équivalent certain = Richesse moyenne – Prime de risque).

En effet, on a : $P_v(W_0, \widetilde{x}) = W^* - W_0$, *et* $\Pi(W_0, \widetilde{x}) = E(\widetilde{x}) - P_v(W_0, \widetilde{x})$, *d'où :*

$$\begin{array}{lrcl} & \Pi(W_0, \widetilde{x}) & = & E(\widetilde{x}) - W^* - W_0; \\ \textit{Donc} & W^* & = & \Big(W_0 + E(\widetilde{x})\Big) - \Pi(W_0, \widetilde{x}). \end{array}$$

5.4 Les mesures de l'aversion au risque

A quelle condition peut-on affirmer qu'un agent a une plus forte aversion au risque qu'un autre ? L'indicateur d'aversion suivant répond bien à cette question.

5.4.1 L'indicateur d'aversion absolue au risque

A partir de développements limités de Taylor MAC LAURIN, ARROW PRATT propose une approximation de l'expression de la prime de risque. Cette approximation est la suivante :

$$\Pi(W_0, \widetilde{x}) = \Big(- \frac{u''\big(W_0 + E(\widetilde{x})\big)}{u'\big(W_0 + E(\widetilde{x})\big)}\Big)\Big(\frac{\sigma^2_{\widetilde{x}}}{2}\Big).$$

On a :

- $\Big(- \frac{u''\big(W_0+E(\widetilde{x})\big)}{u'\big(W_0+E(\widetilde{x})\big)}\Big)$; est une composante subjective propre à l'agent.
- $\Big(\frac{\sigma^2_{\widetilde{x}}}{2}\Big)$ est une composante objective propre à la loterie.

Remarque 5.3. *En générale, cette méthode de PRATT fournit une bonne approximation à condition que le risque soit inférieur au cinquième de la richesse initiale.*

Définition 5.1. La composante subjective de la prime de risque par l'approximation de ARROW PATT est appelée Coefficient d'aversion absolue pour le risque, on le note par :

$$r_A^u = \Big(- \frac{u''\big(W_0 + E(\widetilde{x})\big)}{u'\big(W_0 + E(\widetilde{x})\big)}\Big).$$

- Ce coefficient est invariant lors de toute transformation affine croissante de la fonction d'utilité $u(.)$.
- Ce coefficient est un indicateur local d'aversion au risque car il varie avec le niveau de richesse de l'agent.
- Ce coefficient mesure en fait la courbure de la fonction d'utilité.

Remarque 5.4.

- *Si $dr_A^u(W)/dw > 0$, l'aversion absolue au risque est croissante avec la richesse ; i.e. Plus r_A^u est élevé en étant positif, plus l'agent est risquophobe.*
- *Si $dr_A^u(W)/dw = 0$, l'aversion absolue au risque est constante avec la richesse ; i.e. l'agent est neutre vis à vis du risque.*
- *Si $dr_A^u(W)/dw < 0$, l'aversion absolue au risque est décroissante avec la richesse ; i.e. Plus r_A^u est bat, plus l'agent est risquophile.*

Donc, d'après cette remarque selon le sens de la variation du coefficient r_A^u, les fonctions d'utilité pourront être regroupées dans trois grandes familles :

1. Les fonctions IARA (Increasing Absolute Risk Aversion, i.e aversion absolue au risque croissante) ayant un coefficient r_A^u croissant avec la richesse.
2. Les fonctions DRA (Decreasing Absolute Risk Aversion, i.e aversion absolue au risque décroissante) ayant un coefficient r_A^u décroissant avec la richesse.
3. Les fonctions CARA (Constant Absolute Risk Aversion, i.e aversion au risque constante) ayant un coefficient r_A^u constant avec la richesse.

5.4.2 Tolérance pour le risque

La tolérance pour le risque, notée $T^u(w)$ est donnée de façon réciproque à la prime de risque, donc elle est définie par :

$$T^u(w) = \frac{1}{r_A^u(W)}.$$

ARROW-PRATT a résumé ce qu'on vient de voir dans le théorème suivant :

Théorème 5.1 (Théorème d'ARROW-PRATT). *Soit u_i la fonction d'utilité de l'agent $i (i = 1, 2)$. Les trois définitions suivantes sont équivalentes :*

- *L'agent 1 est plus risquophobe que l'agent 2 si, pour tout niveau de richesse W, on a $r_A^1(W) \geq r_A^2(W)$ (au sens strict si l'inégalité est stricte).*
- *L'agent 1 est plus risquophobe que l'agent 2 si, pour toute action a et pour tout niveau de richesse W, on a $\Pi^1(W_0, \widetilde{x}) \geq \Pi^2(W_0, \widetilde{x})$ (au sens strict si l'inégalité est stricte).*
- *L'agent 1 est (strictement) plus risquophobe que l'agent 2, s'il existe une fonction $f(.)$ (strictement) concave telle que $u_1(W) = f(u_2(W))$.*

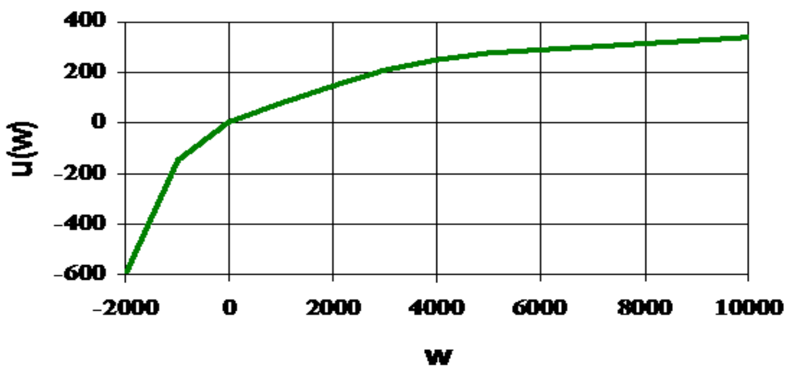
Exemple : Soit :

W	-2000	-1000	0	1000	2000	3000	4000	5000	10000
$u(W)$	-600	-150	0	80	150	210	250	280	340

1- Tracez la fonction d'utilité. Qu'en déduisez vous ?
2- Quel montant maximal est-on prêt à investir dans un projet qui rapportera 1000 Da ou 10 000 Da avec la même probabilité ?
3- Doit-on investir 2000 Da dans un projet où on a 1 chance sur 2 de gagner ou perdre 3000 Da ?
4- Si on a $u(W) = \ln(W); W_0 = 5000Da; \widetilde{x} = L(5000, 0; \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.
 a- Donner l'équivalent certain.
 b- A quel prix l'agent acceptera-t-il de céder la loterie ?
 c- Quelle est la prime de risque de la loterie pour cet agent ?
 d- Calculez la prime de risque par l'approximation de PRATT.

Solution :

1- La fonction d'utilité est donnée dans la figure ci après :



2- On a :

$$\widetilde{W}_f = I + L\Big(1000 - I, 10.000 - I; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = L\Big(1000, 10.000; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big);$$

et :

$$E\Big(u(\widetilde{W}_f)\Big) = \frac{1}{2}u(1000) + \frac{1}{2}u(10.000) = \frac{1}{2}80 + \frac{1}{2}340 = 210.$$

La somme maximale est donc telle que :

$$\Big[u(I) = 210\Big] \Rightarrow \Big[I = 3000\Big].$$

3- On a :

$$E\Big(u(\widetilde{W}_f)\Big) = 2000 + L\Big(3000, -3000; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = L\Big(5000, -1000; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

Ansi, l'espérance de l'utilité de la richesse finale sera donnée par :

$$E\Big(u(\widetilde{W}_f)\Big) = \frac{1}{2}u(5000) + \frac{1}{2}u(-1000) = 65.$$

Calculons l'utilité de l'espérance de la richesse finale :

$$u\Big(E(\widetilde{W}_f)\Big) = u(2000) = 150Da.$$

4-a- On doit chercher W^* tel que :

$$u(W^*) = E\Big(u(\widetilde{W}_f)\Big) = E\Big(u(W_0 + \widetilde{x})\Big).$$

Or, on a :

$$\ln(W^*) = \frac{1}{4}\ln(10000) + \frac{3}{4}\ln(5000) = 8,6904.$$

D'où : $W^* = e^{8,6904} = 5945,56Da$.
4-b- On a le prix de vente :

$$\begin{aligned} P_v(W_0, \widetilde{x}) &= W^* - W_0; \\ &= 5945,56 - 5000 = 945,56Da. \end{aligned}$$

4-c- La prime de risque de cette loterie est donnée par :

$$\begin{aligned} \Pi(W_0, \widetilde{x}) &= E(\widetilde{x}) - P_v(W_0, \widetilde{x}); \\ &= \frac{1}{4} \times 5000 + \frac{3}{4} \times 0 - 945,56 = 1250 - 945,56 = 304,44Da. \end{aligned}$$

Avec cet loterie, l'agent perçoit un risque de 304,44 Da, soit une quantité positive de risque. Notre agent est donc risquophobe.
4-d- On a $u'(W) = \frac{1}{W}$ et $u''(W) = -\frac{1}{W^2}$, donc $-\frac{u''(W)}{u'(W)} = \frac{1}{W}$. Donc :

$$\left(-\frac{u''\big(W_0 + E(\widetilde{x})\big)}{u'\big(W_0 + E(\widetilde{x})\big)}\right) = \frac{1}{\big(W_0 + E(\widetilde{x})\big)} = \frac{1}{5000 + (\frac{1}{4} \times 5000 + \frac{3}{4} \times 0)} = \frac{1}{6250}.$$

Par ailleurs, on a :

$$\sigma^2_{\widetilde{x}} = E(\widetilde{x}^2) - \Big(E(\widetilde{x})\Big)^2 = \left[\frac{1}{4} \times (5000)^2 + \frac{3}{4} \times (0)^2\right] - (1250)^2 = 4687500;$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Pi(W_0, \widetilde{x}) &= \left(-\frac{u''\big(W_0+E(\widetilde{x})\big)}{u'\big(W_0+E(\widetilde{x})\big)}\right)\left(\frac{\sigma^2_{\widetilde{x}}}{2}\right); \\ &= \left(\frac{1}{6250}\right)\left(\frac{4687500}{2}\right) = 375Da. \end{aligned}$$

5.5 Les fonctions d'utilité usuelles en économie

Voici, les fonctions d'utilité les plus utilisées en économie :
1. La fonction d'utilité logarithmique :

$$u(W) = \ln(W) \text{ avec } W > 0.$$

On a : $u'(W) = \frac{1}{W}$ et $u''(W) = \frac{-1}{W^2}$, donc :

$$R^u = -\left[\frac{u''(W)}{u'(W)}\right] = \frac{1}{W}.$$

Donc un agent qui aurait une fonction d'utilité logarithmique est un agent risquophobe. On remarque que l'aversion vis à vis du risque décroît avec la richesse.

2. La fonction d'utilité exponentielle négative :

$$u(W) = -e^{-\lambda W}, \text{ avec } \lambda > 0.$$

On a :$u'(W) = \lambda e^{-\lambda W}$ et $u''(W) = -\lambda^2 e^{-\lambda W}$, donc :

$$R^u = \lambda > 0.$$

Donc un agent qui aurait une fonction d'utilité exponentielle négative est un agent risquophobe. On remarque que l'aversion vis à vis du risque est constante quelque soit la richesse.

3. La fonction puissance :

$$u(W) = \frac{1}{(\theta - 1)} W^{1-\frac{1}{\theta}}, \text{ avec } \theta > 0 \text{ et } \theta \neq 1.$$

On a :$u'(W) = \frac{1}{(\theta)} W^{-\frac{1}{\theta}}$ et $u''(W) = -\frac{1}{(\theta^2)} W^{-\frac{1+\theta}{\theta}}$, donc :

$$R^u = \frac{1}{\theta W} > 0.$$

Donc un agent qui aurait une fonction d'utilité de ce type est un agent risquophobe. On peut remarquer que l'aversion vis à vis du risque est décroissante par rapport à la richesse.

4. La fonction d'utilité linéaire :

$$u(W) = a(W) + b, \text{ avec } a > 0.$$

On a :$u'(W) = a$ et $u''(W) = 0$, donc :

$$R^u = 0.$$

Donc, un agent qui aurait une fonction d'utilité linéaire est un agent neutre vis à vis du risque.

5. La fonction d'utilité quadratique :

$$u(W) = W - \frac{\beta}{2} W^2, \text{ avec } \beta > 0 \text{ et } W < \frac{1}{\beta}.$$

On a :$u'(W) = 1 - \beta W$ et $u''(W) = -\beta$, donc :

$$R^u = \frac{\beta}{1 - \beta W} > 0.$$

Donc un agent qui aurait une fonction d'utilité quadratique (avec $w < 1/\beta$) est un agent risquophobe. On remarque que l'aversion vis à vis du risque augmente avec la richesse.

Remarque 5.5. *Des exercices corrigés sur les notions vues dans ce chapitre (Applications aux assurances et Applications aux choix de portefeuilles) peuvent se télécharger sur les sites suivants :*
http ://econometrie.ish-lyon.cnrs.fr/IMG/pdf/EXERCICES_CORRIGES.pdf
http ://neumann.hec.ca/ p283/private/exe1.pdf

Chapitre 6

Exercices

6.1 Exercices corrigés

Ces exercices corrigés ont fait l'objet de nos examens et nos interrogations.

Exercice 6.1. *Tom et Jerry se rendent ensemble sur leur lieu de travail depuis plus d'un mois. Ils peuvent emprunter soit l'autoroute, soit la nationale. Jerry préfère l'autoroute car la trouvant plus rapide, tandis que Tom a un penchant pour la nationale qu'il juge moins encombrée. Selon que le trafic sur l'autoroute soit fluide ou pas ils sont à même d'estimer le temps que prendra leur trajet. Ce temps étant de 25 mn ou de 45 mn. En empruntant la nationale, ils sont certains de mettre une* ***demi-heure****. Pendant 20 jours, ils décident de ne prendre que l'autoroute et constatent qu'elle n'a été encombrée qu'à trois reprises. On suppose que ces 20 jours sont représentatifs du futur, alors :*
1. *Définissez les probabilités des états de la nature dans ce cas.*
2. *Établissez la matrice d'information.*
3. *Si Tom et Jerry décide d'appliquer le critère MARKOVITZ pour déterminer la décision optimale qu'ils doivent prendre alors que leur préconisera ce critère.*
Solution :
1.$P(e_2) = 3/20 = 0,15; P(e_1 = 1 - 0,15) = 0,85.$
2. *La matrice d'information est :*

Actions \ Etats	$e_1 =$ *le trafic est fluide*	$e_2 =$ *le trafic est encombrant*
$a_1 =$ *Prendre l'autoroute*	25	45
$a_2 =$ *Prendre la nationale*	30	30

3. *Le critère de choix n°1 de MARKOVITZ stipule que :*

$$a_k \succ a_l \text{ si } \begin{cases} E(a_k) \geq a_l \textit{ et } \sigma(a_k) < \sigma(a_l); \\ \textit{ ou bien}; \\ E(a_k) > a_l \textit{ et } \sigma(a_k) \leq \sigma(a_l). \end{cases}$$

On calcule les espérances et les écarts types des deux actions :
$E(a_1) = 0,85 * 25 + 0,15 * 45 = 21,25 + 6,75 = 28;\ E(a_2) = 30.$
$\sigma^2(a_1) = (25 - 28)^2 + (45 - 28)^2 = 9 + 289 = 298 \Rightarrow \sigma(a_1) = \sqrt{298} = 17,26;$
$\sigma^2(a_2) = 0 \Rightarrow \sigma(a_2) = 0;$
donc $E(a_2) > E(a_1)$ *et* $\sigma^2(a_2) < \sigma^2(a_1) \Rightarrow a^* = a_2$ *d'après le critère n°1 de MARKOVITZ.*

Exercice 6.2. *Pour lancer un produit, une entreprise a le choix entre trois médias : affichage, télévision ou presse. Les résultats de la campagne de lancement seront différents en fonction de l'état de la nature qui se réalisera ultérieurement et évidemment selon le média choisi. La concurrence sur le marché du produit en question sera soit faible, soit moyenne ou alors forte. L'entreprise ignore les probabilités associées à chaque niveau de concurrence mais peut cependant estimer les résultats associés à chacune de ces trois stratégies compte tenu de la concurrence et obtenir le tableau suivant :*

Actions \ Etats	*Concurrence faible* (e_1)	*Concurrence moyenne* (e_2)	*Concurrence forte* (e_3)
Affichage	12	-6	24
Télévision	36	12	48
Journaux	-3	60	30

1) *Que vous préconisent les critères suivants : Le critère de LAPLACE ; Le critère de MAXMAX ; Le critère de WALD ; Le critère de HURWICZ et le critère de SAVAGE.*
2) *En utilisant la notion de concordance donner, parmi les stratégies optimales des critères précédents, la stratégie que doit choisir l'entreprise.*
3) *Supposons maintenant que les probabilités des états de la natures sont les suivantes :*

$$\mathbf{p_1 = P(e_1) = 0,25}, \ \ \mathbf{p_2 = P(e_2) = 0,5}.$$

Trouver la décision optimale d'après le critère de PASCAL.
Solution :
1)

- *Le critère de LAPLACE stipule qu'on doit calculer la moyenne de chaque stratégie* $(a_i), \forall i = \overline{1,3}$ *et on choisit la stratégie dont la moyenne est la plus grande. Ainsi :*
  $m_1 = m(a_1) = \frac{12-6+24}{3} = 10; m_2 = m(a_2) = 32; m_3 = m(a_3) = 29 \Rightarrow max(m_1, m_2, m_3) = m_2$*, donc d'après LAPLACE la stratégie optimale est* $a^* = a_2$.
- *Le critère de MAXMAX stipule qu'on doit retenir le résultat le plus favorable pour chaque stratégie et la stratégie optimale sera celle dont le résultat est le maximum. Ainsi :*
  $M_1 = max(a_1) = 24; M_2 = max(a_2) = 48; M_3 = max(a_3) = 60 \Rightarrow max(M_1, M_2, M_3) = M_3 = 60$*, d'où d'après le critère de MAXMAX la stratégie optimale est* $a^* = a_3$.
- *Le critère de WALD stipule qu'on doit identifier pour chaque stratégie le résultat le plus défavorable et on opte pour la stratégie ayant le plus grand de ces résultats défavorables. Ainsi :*
  $m_1 = min(a_1) = -6; m_2 = min(a_2) = 12; m_3 = min(a_3) = -3 \Rightarrow max(m_1, m_2, m_3) = m_2 = 12$*, d'où d'après WALD la stratégie optimale est* $a^* = a_2$.
- *Le critère de HURWICZ est à mi-chemin entre les critères MAXMAX et MAXMIN. Le pire résultat étant pondéré par un coefficient* $\alpha \in [0,1]$ *qui mesure le degré de pessimisme du décideur et le meilleur pondéré par* $(1-\alpha)$*, c'est à dire la fonction de valorisation d'HURWICZ est donnée par le coefficient suivant :*

  $$H(a_i) = \alpha \inf_j (R_{i,j}) + (1-\alpha) \sup_j (R_{i,j}); \alpha \in [0,1].$$

  La stratégie optimale correspond à la stratégie dont le coefficient d'HURWICZ est le plus grand. Ainsi :
  $H(a_1) = -6\alpha + 24(1-\alpha) = -30\alpha + 24;$
  $H(a_2) = 12\alpha + 48(1-\alpha) = -36\alpha + 48;$
  $H(a_3) = -3\alpha + 60(1-\alpha) = -63\alpha + 60.$

• $H(a_1) > H(a_2) \Rightarrow -30\alpha + 24 > -36\alpha + 48 \Rightarrow \alpha > 4$;
• $H(a_1) > H(a_3) \Rightarrow -30\alpha + 24 > -63\alpha + 60 \Rightarrow \alpha > 1,09$;
• $H(a_2) > H(a_3) \Rightarrow -36\alpha + 48 > -63\alpha + 60 \Rightarrow \alpha > 0,44$.
Mais, $\alpha \in [0, 1]$*, donc en résumé, en faisant un petit dessin on aura :*
si $0 < \alpha < 0,44 \Rightarrow a^* = a_3$ *; si* $\alpha \in]0,44, 1[\Rightarrow a^* = a_2$.

- *Selon le critère de SAVAGE la fonction de valorisation est donnée par :*

$$V(a_j) = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} \left(\sup_{a_j} R_{a_j,e_i} - R_{a_j,e_i} \right)$$

et pour déterminer l'action optimale on choisit l'action dont la fonction de regret est la plus faible.
$V(a_1) = (36 - 12) + (60 + 6) + (48 - 24) = 24 + 66 + 24 = 114$;
$V(a_2) = (36 - 36) + (60 - 12) + (48 - 48) = 48$;
$V(a_3) = (36 + 3) + (60 - 60) + (48 - 30) = 57$;
$Min\{V(a_1), V(a_2), V(a_3)\} = V(a_2) \Rightarrow a^* = a_2$.

2) *La notion de concordance tient compte du nombre de fois qu'une action est prise comme action optimale par les différents critères. On constate d'après les critères utilisés précédemment que* $a^* = a_2$ *dans deux cas (critère de LAPLACE et critère de WALD) et* $a^* = a_3$ *pour les critères (MAXMAX et savage), reste le critère d'HURWICZ où l'action optimale dépend de* α*. Ainsi, pour si* $\alpha < 0,44 \Rightarrow a^* = a_3$ *; alors* a_3 *sera optimale d'après la notion de concordance car elle sera choisie par trois critères (MAXMAX, savage et HURWICZ) ; si* $\alpha \in]0,44, 4[\Rightarrow a^* = a_2$ *; alors* a_2 *sera optimale d'après la notion de concordance car elle sera choisie par trois critères (LAPLACE, critère de WALD et HURWICZ et si* $\alpha > 4 \Rightarrow a^* = a_1$*, dans ce cas on ne peut pas choisir entre* a_2 *et* a_3 *car toutes les deux sont prises comme action optimale par deux critères.*

3) *Le critère de PASCAL stipule qu'on doit calculer l'espérance de chaque stratégie* $(a_i), \forall i = \overline{1,3}$ *et on choisit la stratégie dont l'espérance la plus grande. Ainsi :*
On a : $\mathbf{p_1 = P(e_1) = 0,25}$, $\mathbf{p_2 = P(e_2) = 0,5}$. $\Rightarrow \mathbf{P(e_3) = 1 - 0,25 - 0,5 = 0,25}$.
$E_1 = E(a_1) = 12 * 0,25 - 6 * 0,5 + 24 * 0,25 = 3 - 3 + 6 = 6$;
$E_2 = E(a_2) = 36 * 0,25 + 12 * 0,5 + 48 * 0,25 = 9 + 6 + 12 = 27$;
$E_3 = E(a_3) = -3 * 0,25 + 60 * 0,5 + 30 * 0,25 = -0,75 + 30 + 7,5 = 36,25$.
Donc d'après PASCAL la stratégie optimale est $a^* = a_3$*, car* $E(a_3) > E(a_2) > E(a_1)$.

Exercice 6.3. *On considère 3 actions et 4 états de la nature avec des probabilités* p_1, p_2, p_3, p_4 *:*

$Actions \diagdown Etats$	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	30	15	45	95
a_2	10	25	40	120
a_3	40	50	75	5
$p(e_i)$	$p_1 = 0.15$	$p_2 = 0.30$	p_3	$p_4 = 0.20$

1. *En utilisant la fonction de valorisation de MARKOVITZ, est-ce que le critère 1 permet de choisir entre les actions* a_1 *et* a_2 *? Justifiez votre réponse.*
2. *Utilisez le critère 2 de MARKOVITZ pour classer toutes les 3 actions.*
Solution :
1. *On calcule les espérances et les écarts types des trois actions :*

$$\begin{aligned}
E(a_1) &= 30 \times 0,15 + 15 \times 0,3 + 45 \times 0,35 + 95 \times 0,2 = 4,5 + 4,5 + 15,75 + 19 = 43,75; \\
E(a_2) &= 10 \times 0,15 + 25 \times 0,3 + 40 \times 0,35 + 120 \times 0,2 = 1,5 + 7,5 + 14 + 24 = 47; \\
E(a_3) &= 40 \times 0,15 + 50 \times 0,3 + 75 \times 0,35 + 5 \times 0,2 = 6 + 15 + 26,25 + 1 = 48,25;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(a_1) &= \sqrt{\sigma^2(a_1)}\\
&= \sqrt{0,15(30-43,75)^2+0,3(15-43,75)^2+0,35(45-43,75)^2+0,2(95-43,75)^2}\\
&= \sqrt{0,15(189,0625)+0,3(826,5625)+0,35(15625)+0,2(2626,5625)}\\
&= \sqrt{28,359375+247,96875+0,546875+525,3125} = \sqrt{802,18751} = 28,33;\\
\sigma(a_2) &= \sqrt{\sigma^2(a_2)}\\
&= \sqrt{0,15(10-47)^2+0,3(25-47)^2+0,35(40-47)^2+0,2(120-47)^2}\\
&= \sqrt{0,15(1369)+0,3(484)+0,35(49)+0,2(5329)}\\
&= \sqrt{205,35+145,2+17,15+1065} = \sqrt{1433,5} = 20,82;\\
\sigma(a_3) &= \sqrt{\sigma^2(a_3)}\\
&= \sqrt{0,15(40-48,25)^2+0,3(50-48,25)^2+0,35(75-48,5)^2+0,2(5-48,25)^2}\\
&= \sqrt{0,15(68,0625)+0,3(3,0625)+0,35(715,5625)+0,2(1870,5625)}\\
&= \sqrt{10,209375+0,91875+250,44688+374,1125} = \sqrt{635,68751} = 25,21;
\end{aligned}$$

On constate que :
$E(a_2) > E(a_1)$ *et* $\sigma(a_2) < \sigma(a_1) \Rightarrow a_2 \succ a_1$;
$E(a_3) > E(a_1)$ *et* $\sigma(a_3) < \sigma(a_1) \Rightarrow a_3 \succ a_1$;
$E(a_3) > E(a_2)$ *et* $\sigma(a_3) > \sigma(a_2) \Rightarrow$ *on ne peut rien avec ce* 1^{er} *de Markowitz sur* a_3 *et* a_2.
2. *Pour classer les trois actions, on va essayer le deuxième critère de MARKOVITZ :*
D'après le premier critère de MARKOVITZ on sait que $a_2 \succ a_1$ *et* $a_3 \succ a_1$*, il nous reste à comparer* a_2 *et* a_3*. On a :* $\frac{E(a_2)}{\sigma(a_2)} = \frac{47}{20,82} = 2,25$ *et* $\frac{E(a_3)}{\sigma(a_3)} = \frac{48,25}{25,21} = 1,91$ *donc :* $\frac{E(a_2)}{\sigma(a_2)} > \frac{E(a_3)}{\sigma(a_3)} \Rightarrow a_2 \succ a_3$*. Ainsi, d'après le critère de MARKOVITZ on a le classement suivant des trois actions :*

$$a_2 \succ a_3 \succ a_1 \Rightarrow a^* = a_2.$$

Exercice 6.4. *Une association d'étudiants envisage d'organiser une manifestation afin de renflouer sa caisse. Le bureau de l'association se réunit afin de décider du type de manifestation. Deux propositions sont examinées : organiser une soirée dansante ou organiser un rallye touristique. Après étude, il apparaît raisonnable d'espérer un bénéfice net de 18 euros pour la soirée dansante. Le succès du rallye dépend des conditions météorologiques. Les membres du bureau s'accordent à considérer que le bénéfice net sera de 15 euros en cas de mauvais temps, et de 20 euros en cas de beau temps.*
1- *Formaliser le problème de décision.*
2- *Quelle est la solution optimale selon le critère de savage ?*
Une nouvelle proposition est suggérée par l'un des membres du bureau : organiser une compétition de golf. Il apparaît qu'une telle compétition pourrait être très intéressante en cas de beau temps (bénéfice net estimé à 30 euros) mais beaucoup moins en cas de mauvais temps (bénéfice net estimé à 5 euros).
3- *Déterminer, en s'appuyant sur un tableau des regrets construits à partir des 3 solutions envisagée, la solution optimale selon le critère de savage.*
4- *Quel phénomène curieux observe-t-on à l'issue de ces deux premières analyses ? comment l'expliquer ?*
Solution :
1. *Après avoir défini les actions et les états de la nature, on construit le tableau des gains suivant :*

Actions$\diagdown$*Etats*	e_1 : *Cas de mauvais temps*	e_2 : *Cas de beau temps*
a_1 : *organiser une soirée dansante*	18	18
a_2 : *organiser un rallye touristique*	15	20

2. *Selon le critère de SAVAGE la fonction de valorisation est donnée par :*

$$V(a_j) = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} \left(\sup_{a_j} R_{a_j,e_i} - R_{a_j,e_i} \right)$$

et pour déterminer l'action optimale on choisit l'action dont la fonction de regret est la plus faible. On a :

$$\begin{aligned} V(a_1) &= (18-18)+(20-18)=2 \\ V(a_2) &= (18-15)+(20-20)=3 \end{aligned}$$

d'où $a^* = a_1$ *puisque* $\min\{V(a_1), V(a_2)\} = V(a_1)$.
3. *La matrice d'information changera puisqu'il y'a une nouvelle proposition suggérée par l'un des membres du bureau qui est d'organiser une compétition de golf. Ainsi, la matrice d'information deviendra :*

Actions$\diagdown$*Etats*	e_1 : *Cas de mauvais temps*	e_2 : *Cas de beau temps*
a_1 : *organiser une soirée dansante*	18	18
a_2 : *organiser un rallye touristique*	15	20
a_3 : *organiser une compétition de golf*	5	30

Ainsi, selon toujours le critère de SAVAGE on aura :

$$\begin{aligned} V(a_1) &= (18-18)+(20-18)=2 \\ V(a_2) &= (18-15)+(20-20)=3 \\ V(a_3) &= (30-30)+(30-5)=25 \end{aligned}$$

d'où $a^* = a_1$ *puisque* $\min\{V(a_1), V(a_2), V(a_3)\} = V(a_1)$.
4. *On constate que le critère de SAVAGE nous donne la solution optimale* $a^* = a_1$ *dans les deux analyses effectuées et pourtant la dernière proposition est très intéressante en cas de beau temps, cependant le critère de SAVAGE son objectif est d'éviter les regrets et la dernière proposition maximise les regret en cas de mauvais temps. Ainsi, pour éviter les regrets en cas de mauvais temps, le critère de SAVAGE néglige les profits éventuels en cas de bon temps.*

Exercice 6.5. *Une compagnie d'assurance désire changer de taille et a le choix entre trois tailles : petite, moyenne et grande. Si elle opte pour la grande taille et que la demande d'assurance sur le marché venait à ne pas suivre, ce serait dommage pour cette compagnie. Il en serait de même si elle venait à choisir la petite taille et que la demande sur le marché soit élevée. Considérant ces trois niveaux de demande (faible, moyenne et forte), la compagnie d'assurance obtiendra la matrice d'information suivante qui lui fournira ses profits éventuels (en millions d'euros) :*

$Taille\diagdown Demande$	$Faible$	$Moyenne$	$Forte$
$Petite$	4	4	4
$Moyenne$	1	6	6
$Grande$	-3	3	9

1. *Quelle sera la décision optimale si les dirigeants de cette compagnie d'assurance désirent prendre en compte leur pessimisme ?*

2. *Après concertation, ces dirigeants optent pour le critère de SAVAGE. Que vont-il décider ?*
3. *Si on considère maintenant des probabilités associées aux demandes de couvertures de 0,2 pour la faible et de 0,45 pour la forte, alors quelle décision préconise le critère de PASCAL ?*
Solution :
1. *Puisque on doit prendre leur pessimisme alors on utilisera le critère MAXMIN (Critère de WALD) :* $V(a_j) = \inf_{e_i} R_{a_j,e_i}$ *et on choisit le maximum des fonctions de valorisation des trois actions pour choisir l'action optimale. On a :*

$$V(a_1) = \inf\{4,4,4\} = 4; V(a_2) = \inf\{1,6,6\} = 1; V(a_3) = \inf\{-3,3,9\} = -3$$

On a :

$$\max_i V(a_i) = V(a_1) \Rightarrow a^* = a_1.$$

2. *Selon le critère de SAVAGE la fonction de valorisation est donnée par :*

$$V(a_j) = \sum_{e_i=e_1}^{e_n} \left(\sup_{a_j} R_{a_j,e_i} - R_{a_j,e_i} \right)$$

et pour déterminer l'action optimale on choisit l'action dont la fonction de regret est la plus faible.
On a :

$$\begin{array}{rcl} V(a_1) & = & (4-4)+(6-4)+(9-4) = 7 \\ V(a_2) & = & (4-1)+(6-6)+(9-6) = 6 \\ V(a_3) & = & (4+3)+(6-3)+(9-9) = 10, \end{array}$$

d'où $a^* = a_2$ *puisque* $\min\{V(a_1), V(a_2), V(a_3)\} = V(a_2)$.
3. *Les probabilités d'états sont* $P(e_1) = Prob(Faible) = 0,25$ *et* $P(e_3) = Prob(Forte) = 0,45$*, donc* $P(e_2) = Prob(Moyenne) = 1-Prob(Faible)-Prob(Faible) = 1-0,25-0,45 = 0,3$. *Par ailleurs, on appliquant le critère de PASCAL on aura :*

$$\begin{array}{rcl} E(a_1) & = & 4, \\ E(a_2) & = & 1\times 0,25+6\times 0,3+6\times 0,45 = 0,25+1,80+2,70 = 4,75, \\ E(a_3) & = & -3\times 0,25+3\times 0,3+9\times 0,45 = -0,75+0,9+4,05 = 4,2, \end{array}$$

d'où :

$$E(a_2) > E(a_3) > E(a_1) \Rightarrow a_2 \succ a_3 \succ a_1 \Rightarrow a^* = a_2.$$

Exercice 6.6. *Le directeur d'une petite entreprise vient de commander une nouvelle extrudeuse dont la partie essentielle est constituée par une double vis qui permet le mélange et l'extrusion des matières plastiques.*
Au cours de la vie économique de la machine (en général 4 ou 5 ans), il est possible que la double vis casse et doit donc être remplacée. Ceci peut se faire immédiatement si on dispose d'une double vis sur place mais entraîne un coût d'arrêt de la machine estimé à 500 euros s'il faut commander la double vis. De plus, celle-ci sera alors facturée à 300 euros (TVAC) alors que chaque double vis supplémentaire demandée en même temps que la nouvelle machine ne coûte que 200 euros (TVAC).

Sachant que le fournisseur de l'extrudeuse signale qu'il n'est jamais arrivé qu'une double vis se casse plus de 6 fois durant 5 ans, étudier combien de double(s) vis supplémentaire(s) devrai(en)t être commandée(s) selon l'approche pessimiste en prenant comme seul point de vue le coût totale pour l'entreprise après 5 années d'utilisation de la nouvelle machine (sans actualisation des valeurs monétaires).
Pour répondre à cette question suivez les étapes suivantes :
***1.** Structurer le problème, c'est à dire définir les différentes actions et les différents états de la nature pour définir ainsi la table de décision (d'information).*
***2.** Ranger les actions selon les approches suivantes : L'approche pessimiste, l'approche optimiste, l'approche de LAPLACE et l'approche de SAVAGE.*
Solution :
***1.** Structuration du problème :*
***1. 1.** Les différentes actions sont données comme suit :*

- a_0 : *Commander 0 double vis supplémentaires ;*
- a_1 : *Commander 1 double vis supplémentaires ;*
- a_2 : *Commander 2 doubles vis supplémentaires ;*
- a_3 : *Commander 3 doubles vis supplémentaires ;*
- a_4 : *Commander 4 doubles vis supplémentaires ;*
- a_5 : *Commander 5 doubles vis supplémentaires ;*
- a_6 : *Commander 6 doubles vis supplémentaires.*

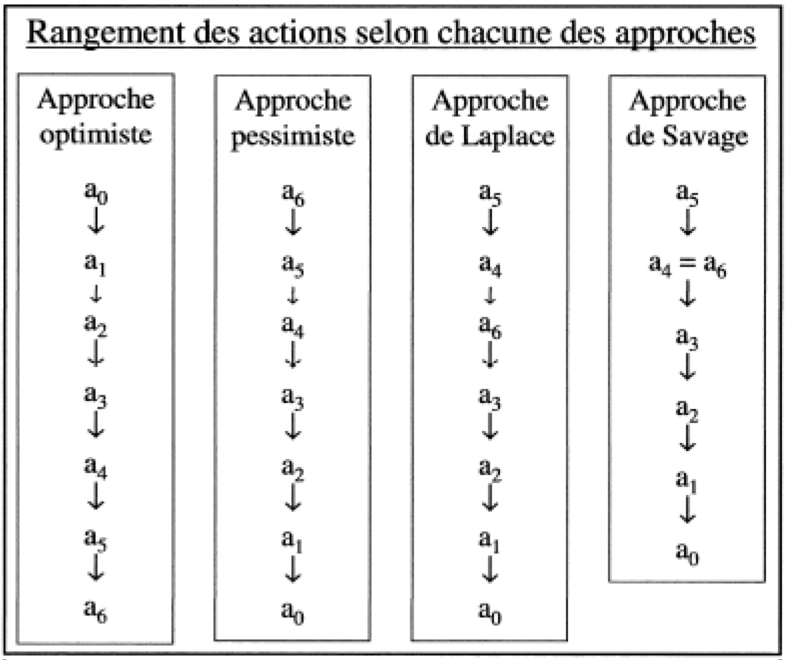
***1. 2.** Les différents états de la nature sont donnés comme suit :*

- e_0 : *0 casse de double vis ;*
- e_1 : *1 casse de double vis ;*
- e_2 : *2 casses de double vis ;*
- e_3 : *3 casses de double vis ;*
- e_4 : *4 casses de double vis ;*
- e_5 : *5 casses de double vis ;*
- e_6 : *6 casses de double vis.*

***1. 3.** La table de décision (la matrice d'information) est donnée comme suit :*

Action\ Etats	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
a_0	0	800	1600	2400	3200	4000	4800
a_1	200	200	1000	1800	2600	3400	4200
a_2	400	400	400	1200	2000	2800	3600
a_3	600	600	600	600	1400	2200	3000
a_4	800	800	800	800	800	1600	2400
a_5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1800
a_6	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200

***2.** Les actions rangées selon les approches demandées :*



Exercice 6.7.

1. *Relier chacun des critères à son principe :*

Critères	*les principes des critères.*
• BERNOULLI	*• Critère de la raison insuffisante.*
• MOYENNE-VARIABILITE.	*• Critère trop optimiste.*
• PASCAL.	*• Critère trop pessimiste.*
• HURWICZ.	*• Critère ni complètement optimiste, ni complètement pessimiste.*
• de WALD (MAXMIN).	*• Critère qui prend en considération la notion de regret.*
• MAXMAX.	*• Critère dont la fonction de valorisation est caractérisée par un couple composé par l'espérance mathématique de l'action et sa variance.*
• SAVAGE.	*• Critère qui permet de changer de stratégie à condition que le taux d'échange soit élevé.*
• MARKOWITZ	*• Critère dont la fonction de valorisation consiste à évaluer l'espérance mathématique de l'utilité de chaque action.*
• LAPLACE	*• Critère généralisant le critère de LAPLACE lorsque l'univers devient mesurable.*

2. *Dans les fondements théoriques de l'économie de l'incertain, quelle est la différence entre un univers mesurable et un univers non mesurable.*

3. *Considérant le Paradoxe de Saint-Pétersbourg suivant :*

un mendiant possède un billet de loterie lui permettant de gagner 20.000 Ducats avec une probabilité égale à 0,5. Un riche marchand lui propose d'acheter ce billet 9.000 Ducats. Le mendiant accepte, ce qui est contraire au paradigme Pascalien ! BERNOULLI a critiqué le critère de PASCAL à partir de cet exemple en disant que le choix du mendiant est raisonnable, alors quelle été la justification de BERNOULLI.

4. *Selon FRANK KNIGHT, quand est ce qu'une situation est dite risquée et quand est ce qu'elle est dite incertaine.*

5. *Les situations suivantes sont-elles risquées ou incertaines selon KNIGHT ?*

a) *Jouer aux dès.*

b) *Parier sur temps à 3 mois.*

c) *Inviter un(e) inconnu(e) au restaurant.*

6. *Quand l'adversaire d'un agent n'est plus la nature expliquer ce qu'on aura à la place de l'espace des états de la nature et pourquoi. Dans ce cas, pour résoudre le problème de décision on fera appel à quelle théorie.*

7. *Quand est ce qu'on fait appel aux notions de concordance et de discordance dans un problème de décision. Que mesure chacune de ces deux notions.*

Solution :

1. *Chacun des critères est relié ici à son principe :*

• Critère de BERNOULLI → • Critère dont la fonction de valorisation consiste à évaluer l'espérance mathématique de l'utilité de chaque action.• Critère MOYENNE-VARIABILITE. → • Critère qui permet de changer de stratégie à condition que le taux d'échange soit élevé.

• Critère de PASCAL → • Critère généralisant le critère de LAPLACE lorsque l'univers devient mesurable.

• Critère d'HURWICZ → • Critère ni complètement optimiste, ni complètement pessimiste.

• Critère de WALD (MAXMIN)→ • Critère trop pessimiste.

• Critère de MAXMAX. → • Critère trop optimiste.

• Critère de SAVAGE. → • Critère qui prend en considération la notion de regret.

• Critère de MARKOWITZ → • Critère dont la fonction de valorisation est caractérisée par un couple composé par l'espérance mathématique de l'action et sa variance.

• Critère de LAPLACE → • Critère de la raison insuffisante.

2. *Dans les fondements théoriques de l'économie de l'incertain, un univers mesurable est un univers ou l'occurrence des états est mesurée par la probabilité (mathématiquement une probabilité est une mesure), il est dit aussi univers risqué. L'univers non mesurable c'est l'univers ou rien n'est mesurable c'est à dire on ne peut pas affecter des probabilités à la réalisation des divers états de la nature ni de façon objective ni de façon subjective et dans ce cas en est dans un univers incertain.*

3. *BERNOULLI a critiqué le critère de PASCAL à partir du paradox de Saint-Pétersbourg, en justifiant le choix du mendiant par le fait que ce qui importe aux agents ce n'est pas le gain en lui même mais plutôt l'utilité qu'il procure. Ainsi, le critère de BERNOULLI stipule que l'action optimale est celle dont l'espérance d'utilité est maximale.*

4. *Selon FRANK KNIGHT, une situation est dite risquée quand les états de la nature dans cette situation sont complétés par leurs probabilités d'occurrence et quand dans une situation on ne dispose pas de ces probabilité d'occurrence des états de la nature on dit que cette situation est dite incertaine.*

5.

a) *"Jouer aux dès" est une situation risquée car on peut associer aux états de la nature dans ce cas des probabilités d'occurrence suivant la nature des dès utilisés (dès à six faces, à quatre faces, ...).*

b) *"Parier sur temps à 3 mois" est une situation incertaine car on a aucune probabilité à affecter aux états de la nature dans ce cas.*

c) *"Inviter un(e) inconnu(e) au restaurant" est une situation risquée car on peut affecter la probabilité $\frac{1}{2}$ à chacun des états qui sont : la personne accepte ou pas l'invitation.*

6. *Quand l'adversaire d'un agent n'est plus la nature, alors on aura à la place de l'espace des états un espace défini par l'ensemble des stratégies ou des actions de cet adversaire. Dans ce cas, les deux adversaires sont rationnels et pour résoudre le problème de décision dans ce cas on fera appel à la théorie des jeux.*

7. On peut remarquer que le choix de la stratégie optimale dépend étroitement du critère retenu, ce qui met en évidence une question fondamentale qui est : Quel critère faut-il retenir et pourquoi ? En essayant de répondre à cette question, on peut se retrouver face au paradoxe de Concordet qui stipule que l'agrégation des préférences ne conduit pas toujours à l'obtention d'un préordre. Cet écueil peut être éviter en ayant recours aux notions de concordance et de discordance.
La concordance mesure le nombre de fois qu'une action est préférée à toutes les autres. La discordance évalue la somme pondérée des distances entre une action et celle préférée par un critère, somme pondérée par le poids attribué aux différents critères par le décideur, bien évidement la solution retenue sera caractérisée par le seuil fixé par le décideur.

Exercice 6.8. *Soit le problème de décision suivant :*

Actions \ *Etats*	e_1	e_2
a_1	15	10
a_2	10	12
a_3	8	20
	$P(e_1)$	$P(e_2)$

avec $P(e_1) = 0.8$ *d'où* $P(e_2) = 0.2$
***1.** Que préconise le critère de PASCAL à ce problème de décision.*
***2.** Que préconise le critère de MARKOVITZ.*
***3.** On se place maintenant dans le cas non mesurable :*
  ***a)** Que préconise le critère de WALD (critère de MAXMIN) :*
  ***b)** Que préconise le critère MAXMAX :*
Solution :
***1.** Le critère de PASCAL stipule que la stratégie (action) optimale est celle dont l'espérance est la maximale parmi toutes les espérances de chacune des stratégies. On calcule donc l'espérance de chaque action :*

$$\begin{aligned} E(a_1) &= 0.8(15) + 0.2(10) = 12 + 2 = 14; \\ E(a_2) &= 0.8(10) + 0.2(12) = 8 + 2.4 = 10.4; \\ E(a_3) &= 0.8(8) + 0.2(20) = 6.4 + 4 = 10.4. \end{aligned}$$

On a : $E(a_1) > E(a_2) = E(a_3)$*, donc d'après le critère de PASCAL on aura :* $a_1 \succ a_2$ *et* $a_1 \succ a_3$ *d'où* $a^* = a_1$*, cependant avec ce critère on ne peut pas choisir entre les deux actions* a_2 *et* a_3 *puisqu'elles possèdent la même espérance.*
***2.** Le critère de MARKOVITZ stipule que :*

$$a_k \succ a_l \Leftrightarrow \begin{cases} E(a_k) \geq E(a_l) \text{ et } \sigma(a_k) < \sigma(a_l); \\ \text{ou} \\ E(a_k) > E(a_l) \text{ et } \sigma(a_k) \leq \sigma(a_l). \end{cases}$$

On va alors calculer, en plus des espérances calculées précédemment, les écarts type des différentes *stratégies. On a :* $\sigma(a_k) = \sqrt{\sum_{e_i} P(e_i)[R_{a_k,e_i} - E(a_k)]^2}$*, d'où :*

$$\begin{aligned}
\sigma(a_1) &= \sqrt{0.8(15-14)^2 + 0.2(10-14)^2} = \sqrt{0.8+3.2} = 2;\\
\sigma(a_2) &= \sqrt{0.8(10-10.4)^2 + 0.2(12-10.4)^2} = \sqrt{0.64} = 0.8;\\
\sigma(a_3) &= \sqrt{0.8(8-10.4)^2 + 0.2(20-10.4)^2} = \sqrt{23.04} = 4.8.
\end{aligned}$$

On constate que :
- $E(a_1) > E(a_2)$ *et* $\sigma(a_1) > \sigma(a_2) \Rightarrow$ *on ne peut rien conclure par le critère initial de Markowitz.*
- $E(a_1) > E(a_3)$ *et* $\sigma(a_1) < \sigma(a_3) \Rightarrow a_1 \succ a_2$.
- $E(a_2) = E(a_3)$ *et* $\sigma(a_2) < \sigma(a_3) \Rightarrow a_2 \succ a_2$.

Donc, il reste à comparer entre a_1 *et* a_2 *via le premier critère de MARKOVITZ qui stipule que :*

$$\frac{E(a_k)}{\sigma(a_k)} > \frac{E(a_l}{\sigma(a_l)} \Rightarrow a_k \succ a_l.$$

Or on a :

$$\frac{E(a_2}{\sigma(a_2)} = \frac{10.4}{0.8} > \frac{E(a_1}{\sigma(a_1)} = \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow a_2 \succ a_1.$$

En résumé, d'après MARKOVITZ, on a : $a_2 \succ a_1 \succ a_3 \Rightarrow a^* = a_2$.

3. *On se place maintenant dans le cas non mesurable :*

a) *Ce que préconise le critère de WALD (critère de MAXMIN) :*

le critère de WALD stipule qu'on doit prendre le minimum des résultats de chaque stratégie face aux différents états de la nature et de prendre par la suite le maximum de tous ces minima. La stratégie à laquelle correspond cette valeur maximale sera l'optimale.

On a :

$$\begin{cases} V(a_1) = 10 \\ V(a_2) = 10 \\ V(a_3) = 8 \end{cases} \Rightarrow Max(V(a_1), V(a_2), V(a_3)) = V(a_1) = V(a_2) = 10.$$

Donc, d'après le critère de WALD $a^* = a_1$ *ou* $a^* = a_2$*, cependant avec ce critère on ne peut choisir entre* a_1 *et* a_2.

b) *Ce que préconise le critère MAXMAX :*

Le critère MAXMAX stipule qu'on doit prendre le maximum des résultats de chaque stratégie face aux différents états de la nature et de prendre par la suite le maximum de tous ces maxima. La stratégie à laquelle correspond cette valeur maximale sera l'optimale.

On a :

$$\begin{cases} V(a_1) = 15 \\ V(a_2) = 12 \\ V(a_3) = 20 \end{cases} \Rightarrow Max(V(a_1), V(a_2), V(a_3)) = V(a_3) = 20.$$

Donc, d'après le critère MAXMAX, on a : $a^* = a_3$.

Exercice 6.9. *Soit une entreprise ayant P_n politiques de production à suivre pour différents niveaux de demandes éventuels D_n. Le coût unitaire de production est de $30USD$, le prix de vente unitaire est de $40USD$, le gain unitaire est ainsi de $10USD$ et cela à une seule condition : Que la production soit vendue entièrement, si non la production serait supérieure à la demande et le reste (stock non vendu) représente une perte pour l'entreprise.*
La matrice de gain de l'entreprise est la suivante (en milliers de USD) :

Evénements *Stratégies*	D P	2000	2200	2400	2500	2700	2800	3000
A_1	2000	20	20	20	20	20	20	20
A_2	2200	14	22	22	22	22	22	22
A_3	2400	8	16	24	24	24	24	24
A_4	2500	5	13	21	25	25	25	25
A_5	2700	-1	7	15	19	27	27	27
A_6	2800	-4	4	12	16	24	28	28
A_7	3000	-10	-2	6	10	18	22	30

Avec : • *D : C'est le niveau de la demande exprimé en unités,*
• *P : C'est le niveau de la production exprimé en unités,*
• *Il y a 7 stratégies de production à suivre (A_1 à A_7),*
• *Chaque niveau de production correspond à une stratégie de production face à une demande qui varie de 2000 unités à 3000 unités.*

***1)** Quelle stratégie de production doit on choisir suivant chacun des critères suivants :*
Le critère de WALD, le critère de SAVAGE, le critère de LAPLACE et le critère d'HURWICZ (pour un coefficient d'optimisme $\lambda = 0,07 = 70\%$).

Solution :

***I.** Dans notre exemple les gains minimums correspondent à la première colonne de la matrice de gain soit : 20, 14, 8, 5, -1, -4, -10. Parmi ces minimums de gain on doit choisir le maximum qui est 20, donc on choisi la stratégie A1 qui est la plus convenable selon WALD.*

***II.** SAVAGE fait intervenir un autre critère appelé «critère de regret» c'est-à-dire il essaie d'analyser les résultats après leur exécution. Pour le faire SAVAGE se base sur la matrice de gain, il retient pour chaque état de la nature (niveau de demande) la décision qui assure le meilleur gain et il soustrait de chaque colonne les autres gains effectivement réalisés. Le regret est ainsi égal à la différence entre le gain réalisé et le gain le plus favorable de chaque colonne.*
La matrice de regret construite à partir de la matrice de gain de est la suivante :

Stratégies	D P	2000	2200	2400	2500	2700	2800	3000
A_1	2000	0	2	4	5	7	8	10
A_2	2200	6	0	2	3	5	6	8
A_3	2400	12	6	0	1	3	4	6
A_4	2500	15	9	3	0	2	3	5
A_5	2700	21	15	9	6	0	1	3
A_6	2800	24	18	12	9	3	0	2
A_7	3000	30	24	18	15	9	6	0

SAVAGE conseille de choisir la stratégie de production qui rend minimum le regret maximum. Ainsi et en se référant à la matrice de regret, on a les regrets maximum qui sont : $A_1 = 10, A_2 = 8, A_3 = 12, A_4 =$

$15, A_5 = 21, A_6 = 24, A_7 = 30$. *Donc selon cette méthode, on doit choisir la stratégie* $A_2 = 8$ *qui rend minimum le regret maximum.*
III. *Le critère de LAPLACE ; est le critère le plus ancien et le plus simple, il consiste à calculer la moyenne arithmétique des gains pour chaque stratégie et de retenir la stratégie qui présente la moyenne la plus élevée. En d'autres termes cette stratégie consiste pratiquement à attribuer une probabilité égale à chaque état de la nature et de retenir la stratégie qui à la moyenne la plus élevée. On aura ainsi :*

moy(A_1)=(20+20+20+20+20+20+20)/7=20,00 ;
moy(A_2)=(14+22+22+22+22+22+22)/7=20,80 ;
moy(A_3)=(8+16+24+24+24+24+24)/7=20,50 :
moy(A_4)=(5+13+21+25+25+25+25)/7=19,80 ;
moy(A_5)=(-1+7+15+19+27+27+27)/7=17,20 ;
moy(A_6)=(-4+4+12+16+24+28+28)/7=15,40 ;
moy(A_7)=(-10-2+6+10+18+22+30)/7=10,50 ;

On retient alors la stratégie A2 qui présente la moyenne la plus élevée.
IV. *Le critère d'HURWICZ (pour un coefficient d'optimisme* $\lambda = 0,07 = 70\%$*) :*
A partir de là on calcule l'espérance mathématique de chaque stratégie de production de la manière suivante : $H(A_i) = \lambda M + (1-\lambda)m$ *avec* $E(A_i)$ *espérance mathématique de la stratégie de production* i*,* λ *taux d'optimisme du résultat maximum,* $1-\lambda$ *taux du résultat minimum,* M *résultat le plus élevé de chaque stratégie de production,* m *résultat le moins élevé de chaque stratégie de production.*

$$H(A_1) = 0,7 \times 20 + 0,3 \times 20 = 20,00;$$
$$H(A_2) = 0,7 \times 22 + 0,3 \times 14 = 19,60;$$
$$H(A_3) = 0,7 \times 24 + 0,3 \times 8 = 19,20;$$
$$H(A_4) = 0,7 \times 25 + 0,3 \times 5 = 19,00;$$
$$H(A_5) = 0,7 \times 27 + 0,3 \times (-1) = 18,60;$$
$$H(A_6) = 0,7 \times 28 + 0,3 \times (-4) = 18,40;$$
$$H(A_7) = 0,7 \times 30 + 0,3 \times (-10) = 18,00$$

On doit choisir la stratégie de production qui assure le maximum de gain c'est-à-dire la stratégie A_1.

Exercice 6.10. *Soit un agent dont la fonction d'utilité est donnée par* $u(W) = \ln(W)$ *et sa richesse initiale est de* $w_0 = 50.000 Da$*. Il peut acheter un billet de type loto qui lui permet de gagner 3 millions de Da avec une chance sur 13 millions. Quel est le prix maximum est-il prêt à payer pour acheter un tel billet ?*

Solution : On a :

$$\widetilde{W_f} = 500.00 + L\Big(4.9999, 3.000.000 - 49999; 1 - \frac{1}{13.000.000}, \frac{1}{13.000.000}\Big)$$

L'agent achètera le billet si et seulement si l'équivalent certain est supérieur ou égal à sa richesse initiale.

$$\begin{aligned} u(w^*) &= E\Big(u(\widetilde{W_f})\Big) = E\Big(u(W_0 + \widetilde{x})\Big); \\ &= \Big(1 - \frac{1}{13.000.000}\Big)\ln(49999) + \frac{1}{13.000.000}\ln(3049999). \end{aligned}$$

D'où :

$$W^* = 49999,0157 Da.$$

On a : $W^* = 49999,0157 Da < W_0 = 50000 Da$, donc l'agent n'achètera pas le billet.

Exercice 6.11. *Soient deux individus, 1 et 2, avec le même niveau de richesse initiale* $W_0 = 100$*, mais avec des fonctions d'utilité différentes, respectivement*

$$u_1(W) = \ln W; \quad et \quad u_2(W^\circ = W^{\frac{1}{2}}.$$

En plus de W_0 *, ils possèdent le billet de loterie suivant :*

$$\widetilde{x} = L\Big(1, 10, 100; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\Big).$$

1. *Calculez et comparez les primes de risque respectives des deux individus pour cette loterie.*
2. *Y a-t-il une raison de s'attendre 'à ces résultats (calculer l'aversion absolue pour le risque des deux agents) ?*

Solution :
1. La prime de risque est donnée par :

$$\Pi(W_0, \widetilde{x}) = E(\widetilde{x}) + W_0 - W^*.$$

On a : $E(\widetilde{x}) = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}10 + \frac{1}{3}100 = 37.$
• On calcule W_1^* pour l'agent 1 :

$$u_1(W_1^*) = \ln(W_1^*) = \frac{1}{3}\ln(101) + \frac{1}{3}\ln(110) + \frac{1}{3}\ln(200) = 4,8713 \Rightarrow W_1^* = e^{4.8713} = 130,50.$$

Donc :

$$\Pi_1(W_0, \widetilde{x}) = 37 + 100 - 130,50 = 6,5.$$

La prime de risque est positive donc l'agent 1 est risquophobe.
• On calcule W_2^* pour l'agent 2 :

$$u_2(W_2^*) = \sqrt{(W_2^*)} = \frac{1}{3}\sqrt{101} + \frac{1}{3}\sqrt{110} + \frac{1}{3}\sqrt{200} = 11,56 \Rightarrow W_2^* = (11.56)^2 \approx 133,63.$$

Donc :

$$\Pi_2(W_0, \widetilde{x}) = 37 + 100 - 133,63 \approx 3,36.$$

La prime de risque est positive donc l'agent 2 est aussi risquophobe.
2. On pouvait s'attendre à ce résultat car les deux agents ont des fonctions d'utilité d'agent risquophobe. Il est possible de calculer le coefficient d'aversion absolu pour le risque pour les deux agents et détecter quel est l'agent qui est plus risquophobe que l'autre :

$$r_A^{u_1} = \Big(-\frac{u_1''(W)}{u_1'(W)}\Big) = \frac{\big(\frac{-1}{x^2}\big)}{\big(\frac{1}{x}\big)} = \frac{1}{x}.$$

et :

$$r_A^{u_2} = \Big(-\frac{u_2''(W)}{u_2'(W)}\Big) = \frac{\big(\frac{-1}{4x^{3/2}}\big)}{\big(\frac{1}{2\sqrt{x}}\big)} = \frac{1}{2x}.$$

On a : $r_A^{u_2} < r_A^{u_1} \Rightarrow$ l'agent 2 est moins risquophobe que l'agent 1, il est donc normal que la prime de risque de l'agent 2 soit inférieure à celle de l'agent 1.

Exercice 6.12. *Supposez que la fonction d'utilité d'un individu soit la suivante :*

$$u(W) = -e^{-W}.$$

Cet individu peut participer à une loterie lui procurant une richesse w_1 ou w_2 avec des probabilités égales.
1. *Calculez l'équivalent certain de cette loterie pour les couples de richesse suivants : (0, 10), (10, 20), (20, 30). Que pouvez-vous en conclure ?*
2. *Si ce même individu avait la fonction d'utilité suivante :*

$$u(W) = 5 - 0,2e^{-W},$$

quel serait l'équivalent certain de cette loterie pour les couples de richesse citées ? Que pouvez-vous en conclure ?
3. *Est-ce que cet individu est averse au risque ? Argumentez votre réponse à l'aide de deux résultats.*

Solution :
1. L'équivalent certain de la loterie donnée pour :
• le couple de richesse $(0, 10)$ est donné par :

$$-e^{-W_1^*} = -\frac{1}{2}e^{W_1} - \frac{1}{2}e^{W_2} = -\frac{1}{2}e^{-0} - \frac{1}{2}e^{-10} \approx -\frac{1}{2} \Rightarrow W_1^* = 0,6931.$$

• le couple de richesse $(10, 20)$ est donné par :

$$-e^{-W_1^*} = -\frac{1}{2}e^{W_1} - \frac{1}{2}e^{W_2} = -\frac{1}{2}e^{-10} - \frac{1}{2}e^{-20} \Rightarrow W_1^* = 10,6931.$$

• le couple de richesse $(20, 30)$ est donné par :

$$-e^{-W_1^*} = -\frac{1}{2}e^{W_1} - \frac{1}{2}e^{W_2} = -\frac{1}{2}e^{-20} - \frac{1}{2}e^{-30} \Rightarrow W_1^* = 20,6931.$$

Donc, on peut conclure que :

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_1 &= L\Big(0, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big).\\
\widetilde{x}_2 &= L\Big(10, 20; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = 10 + L\Big(0, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big).\\
\widetilde{x}_3 &= L\Big(20, 30; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = 20 + L\Big(0, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big).
\end{aligned}$$

2. Si maintenant la fonction d'utilité est :

$$u(W) = 5 - 0,2e^{-W}.$$

L'équivalent certain sera :

$$5 - 0,2\, e^{-W^*} = \frac{1}{2}(5 - 0,2\, e^{-W_1}) + \frac{1}{2}(5 - 0,2\, e^{-W_2}) \Rightarrow -\, e^{-W^*} = -\frac{1}{2}\, e^{-W_1}) - \frac{1}{2}\, e^{-W_2}.$$

On vient de retrouver la première fonction d'utilité. Donc les équivalents certains seront identiques. A une transformation affine près (voir cours) les fonctions d'utilité définissent la même psychologie des agents. On peut vérifier que les agents ont le même degré d'aversion au risque. En effet :

$$r_A^{u_1} = \Big(- \frac{u_1''(W)}{u_1'(W)}\Big) = - \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = 1.$$

et :

$$r_A^{u_2} = \Big(- \frac{u_2''(W)}{u_2'(W)}\Big) = - \Big(\frac{-0,2\ e^{-x}}{0,2\ e^{-x}}\Big) = 1.$$

Exercice 6.13. *Vous êtes un étudiant dont la richesse totale est de 20000 euros. Vous devez vous rendre en France. Vous possédez un billet qui ne donne aucune flexibilité dans les dates, de sorte que si vous tombez malade et ratez l'avion vous devez acheter un autre billet au coût de 1000 euros.*
1. *Si votre fonction d'utilité est $u(W) = W^{0,4}$, calculez le montant maximal que vous êtes disposé à payer pour une assurance qui vous rembourse le billet en cas de maladie. Vous estimez 'a 1% la probabilité de rater l'avion pour cause de maladie.*
2. *Si vous êtes professeur, avec la même fonction d'utilité et la même probabilité de maladie, mais avec une richesse totale de 100000 euros, acceptez-vous de payer le montant d'assurance déterminé sous 1 ?*

Solution :
On est face à loterie suivante :

$$\widetilde{x} = 20000L\Big(- 1000, 0; \frac{1}{100}, \frac{99}{100}\Big) = L\Big(19000, 20000; \frac{99}{100}, \frac{99}{100}\Big).$$

Donc l'équivalent certain est :

$$W^*0,4 = \frac{1}{100}19000^{0,4} + \frac{99}{100}20000^{0,4} \approx 52,519882 \Rightarrow W^* \approx 19989,84.$$

Le prix de vente de la loterie est :

$$P_v\Big(W_0, \widetilde{x}\Big) = W^* - W_0 \approx -10,15.$$

Ceci signifie que notre étudiant accepte de donner $10,15$ euros pour se débarrasser de cette loterie. Ainsi on peut imaginer qu'il accepterait de payer une assurance d'un montant maximum de $10,15$ euros pour couvrir son risque. Si l'assureur demandait une somme plus importante, notre étudiant refuserait de s'assurer car son équivalent certain serait inférieur à celui qu'il aurait en gardant la loterie.

6.2 Exercices non corrigés

Ces exercices non corrigés ont fait objet de nos séries de T.D..

Exercice 6.14. *Une petite entreprise a les droits miniers sur un terrain. Un consultant géologue estime qu'il y'a une chance sur quatre d'y découvrir un gisement de pétrole.*
Il est coûteux d'effectuer un forage pour trouver du pétrole et, si on ne découvre pas du pétrole, le coût de forage $(100.000\ euro)$ *peut presque conduire l'entreprise à la faillite. D'un autre côté, s'il y'a un gisement de pétrole, ce sera un coup superbe pour l'entreprise (*$800.000\ euro$ *de revenus).*
Plutôt que forer, la petite entreprise a aussi la possibilité de revendre ses droits miniers : une entreprise

concurrente a proposé de racheter les droits d'exploitation du terrain au prix de $90.000\ euro$.
• *Structurer le problème i.e. Définir les différentes actions, les différents états de la natures et par la suite le tableau d'information.*
• *En utilisant l'approche de la valeur espérée, donner l'action optimale.*

Exercice 6.15. *Un directeur financier a le choix entre trois investissements nécessitant la même mise initiale en l'occurrence 50 U.M. (unité monétaire). L'estimation des valeurs actuelles nettes correspondant aux trois investissements et en concordance avec l'état du marché est fournie par le tableau suivant :*

Actions \ *Etats*	*État*1	*État*2	*État*3	*État*4
$Investissement1$	10	25	40	100
$Investissement2$	5	30	50	125
$Investissement3$	25	50	75	0

Il a réussi à estimer les probabilités d'occurrence des différents états du marché :

$$P(\textit{état}1) = 0.2;\ P(\textit{état}2) = 0.1;\ P(\textit{état}3) = 0.5.$$

• *Que lui indique le critère espérance-variance ?*
• *Ce dirigeant décide de choisir la décision maximisant* $E(VAN) - \frac{1}{125}Var(VAN)$. *Que devient alors son choix ? (VAN : Valeur Actuelle Nette).*
• *Pour quel investissement ce directeur financier devra-t-il opter en prenant en compte sa perception du risque (son coefficient* λ*) ?*
• *Quel investissement devra-t-il choisir s'il est réputé être d'un tempérament optimiste ?*

Exercice 6.16. *Le gérant d'une station service voyant arriver l'hiver désire acquérir un chasse-neige de première ou de seconde génération. Après une judicieuse étude de marché, il obtient les informations suivantes :*

*Machine**tombée de neige*	*forte*	*moyenne*	*faible*
2^{eme} *génération*	7000	2000	-9000
1^{ere} *génération*	3500	1000	-1500

• *Que doit faire le gérant s'il utilise le critère de LAPLACE ?*
• *Que devient son choix sachant qu'il n'est ni optimiste ni pessimiste ?*

Exercice 6.17. *Un propriétaire d'une maison hésite entre prendre une assurance couvrant la totalité des frais en cas de cambriolage ou ne pas s'assurer. L'assurance coûte 2000 euro. Les biens possédés par le propriétaire sont estimés à 40 000 euro. On estime que la perte financière en cas de cambriolage est de 5 000 euro. L'avenir est considéré comme non probabilisable.*
1. *Donner la matrice des gains associée à ce problème ? puis donner la matrices des pertes ?*
2. *En utilisant la matrice des gains, quelle décision doit prendre le propriétaire s'il applique le critère de SAVAGE ? le critère de HURWICZ ?*

Exercice 6.18. *Un marchand ambulant a le choix entre remplir son chariot de glaces, de boissons ou bien vendre des journaux ou encore des jouets. Mais le temps peut faire des caprices. Il peut faire beau, le ciel peut être couvert ou encore pleuvoir. Dans chaque cas les profits attendus par le marchand sont donnés dans le tableau suivant :*

1. *Modéliser cette situation sous forme d'un problème sous incertitude.*
2. *Quelle est l'action qui fournit au marchand un gain garanti minimum.*

Gains	Temps		
	Beau	Couvert	Pluie
Glaces	500	100	0
Boissons	250	800	350
Journaux	150	400	800
Jouets	600	300	260

3. *En utilisant le principe de SAVAGE, quelle sera l'action conseillée à la société ?*
4. *Qu'en est-il avec le critère d'HURWICZ pour un ($\lambda = 0,7$) ? LAPLACE ?*

Exercice 6.19. *Une entreprise fabriquant des jouets est confrontée à un risque de grève des transporteurs routiers. Elle a établit un plan de fabrication et d'expédition de 5000 articles par semaine qui correspond exactement à la demande hebdomadaire des distributeurs. Le coût de fabrication est alors de 30 DA et l'article est vendu par la suite à 45DA. Une grève si elle a lieu, débutera peut être dans une semaine. Elle peut durer soit 1 semaine, soit 2 semaines. En cas de grève, l'entreprise ne produit pas car elle ne peut pas stocker. De plus elle perd la totalité de ses ventes si les distributeurs ne sont pas livrés. Devant fixer le niveau de production de cette semaine, l'entreprise a le choix entre trois décisions :*
- *Soit produire et expédier, selon son plan initial, 5000 articles,*
- *Soit produire et expédier 10 000 articles pour satisfaire la demande des deux premières semaines,*
- *Soit produire et expédier 15000 articles pour satisfaire la demande des trois semaines.*

La capacité de production maximale de l'entreprise est de 7000 articles par semaine. Au delà cette limite, l'entreprise sous-traite la production mais le coût passe à 40 DA par article. Le principe est de maximiser la marge (profit) sur la période des trois semaines à venir.

1. *Modéliser ce problème comme un problème de décision dans l'incertain (actions, états de la nature, tableau des gains correspondant aux marges cumulées sur 3 semaines).*
2. *Quelle décision prendre à la base du critère de gain garanti minimal ?*
3. *Quelle décision prendre à la base du critère du regret maximal ?*
4. *Quelle décision prendre à la base du critère de HURWICZ avec un coefficient d'optimisme 4/5.*
5. *Pour quelle valeur du coefficient d'optimisme, A1 est elle une solution optimale ?*
6. *Quelle décision prendre à la base des autres critères ?*

Exercice 6.20. *A l'approche des fêtes, un grossiste en cadeaux d'entreprise prépare sa stratégie de commercialisation. Il considère deux réactions possibles de sa clientèle : r_1 : réaction favorable, r_2 : réaction mitigée.*
Le grossiste estime qu'en cas de réaction mitigée, la marge nette réalisée sera d'un montant x. Elle devrait être 3 fois plus élevée en cas de réaction favorable. Le grossiste s'interroge alors sur l'opportunité d'effectuer une compagne de publicité. Le coût de la compagne est estimé à x. On considère qu'une compagne publicitaire permettra de doubler la marge prévue en cas de réaction favorable. Elle n'aura aucun effet en cas de réaction mitigée.

a. *Modéliser cette situation sous forme d'un problème en environnement incertain.*
b. *On considère maintenant que p est la probabilité d'observer la réaction r_1. En considérant un critère d'espérance mathématique des gains, donner la valeur minimale de p conduisant à préférer le lancement de la compagne publicitaire.*

Exercice 6.21. *Vous organisez un jeu devant un feu rouge en pariant sur le premier chiffre de la plaque d'immatriculation de la première voiture qui s'arrêtera au feu rouge. Vous êtes curieusement risquo-*

phile !

$$u(W) = -e^{-\lambda}; W_0 = 1000Da; \lambda = 0,01.$$

Vous proposez à un agent risquophile de lui donner 4 fois sa mise s'il trouve le bon chiffre ! Il désire miser 50 Da. Êtes vous d'accord ?

Conclusion générale

Dans ce support de cours nous avons donné une petite introduction aux fondements théoriques de l'incertain et de la théorie de risque en économie. Cette introduction est indispensable aux étudiants pour pouvoir élargir leurs connaissances dans la théorie de la décision en présence de l'incertitude surtout qu'aujourd'hui les agents économiques sont constamment confrontés à des choix en avenir incertain dans des contextes aussi divers que : la consommation, l'épargne, la production, la couverture, l'assurance, l'investissement, etc.

On peut conclure ce support de cours en deux mots en répondant à la question :

Quelle règle de décision utiliser ? ? ?

Cela dépend avant tout de l'information disponible (type d'incertitude, type d'utilité) et de l'attitude vis à vis du risque.

Enfin, une remarque à l'intention des étudiants voulant voir des exemples économiques d'application de la théorie abordée dans ce cours, **"consultez les derniers chapitres de [7] ainsi que le mémoire de fin d'étude [4].**

Bibliographie

[1] D. Bouyssou and P. Vincke. Relations binaires et modélisation de préférences. Hermès, 2003.

[2] Georges Dionne, Incertain et information : où en sommes-nous trente-cinq ans après le Colloque de Paris ?, L'Actualité Économique, Revue d'analyse économique, vol. 63, n° 2-3, juin-septembre 1987. URI : http ://id.erudit.org/iderudit/601408ar
DOI : 10.7202/601408ar

[3] Analyse de la décision dans l'incertain, Cours de Bernard Espinasse, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille (2009). http ://www.lsis.org/espinasseb/Supports/MOAD-2009/4-AnalyseDecisionIncertain-2009-4P.pdf

[4] Fadi Yazigi, mémoire de fin d'étude, DESS Gestion des actifs financiers, Université Saint-Joseph, Beyrouth, Liban, 2005. http ://www.memoireonline.com/12/09/3053/m_La-decision-dinvestissement-en-avenir-incertain4.html

[5] A. Gremillet, (1972), Sélection et contrôle des investissements, Les Éditions d'organisation, Paris.

[6] Cours de J. Y. Jaffray, P. Perny et C. Gonzales, LIP6 CNRS, Université Paris VI.

[7] Octave Jokung Nguéna, Microéconomie de l'incertain. Risques et décisions, 2ème édition (Broché), 2001.

[8] J. L. Cayatte, Microéconomie de l'incertitude, De Boeck Superieur, oucertures économique.

[9] Gilles Philippe. Incertitude, risque et asymétrie d'information sur les marchés financiers. In : Revue française d'économie. Volume 7 N°2, 1992. pp. 53-115.
doi : 10.3406/rfeco.1992.1308
url :/web/revues/home/prescript/article/rfeco_0769-0479_1992_num_7_2_1308

[10] H. Raïffa, « Analyse de la décision : introduction aux choix en avenir incertain », Dunod, 1973. Traduction de « Decision analysis : introductory lectures on choices under uncertainty », Addison-Wesley, 1970.

[11] K. Zakwan. Contribution à l'étude des méthodes quantitatives d'aide à la décision-appliquées aux indices du marché d'actions. Humanities and Social Sciences. Université Mon- tesquieu - Bordeaux IV, 2007. French. (voir https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00413979/document).

[12] Cours de Laurent denant-boemont : http ://blogperso.univ-rennes1.fr/laurent.denant-boemont/public/chap1_economie_incertain_L3MASS.pdf
http ://blogperso.univ-rennes1.fr/laurent.denant-boemont/public/chap2_l3mass.pdf

http ://blogperso.univ-rennes1.fr/laurent.denant-boemont/public/chap3_l3mass.pdf

[13] Cours d'Arthur Charpentier "Introduction à l'économie de l'information et à l'économie de l'incertain".
http ://perso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/cours-agreg-information-incertain.pdf