Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie
$2^{ème}$ année LMD

Mardi 28/06/2016

Rattrapage de Biostatistique

Durée : 02 heures

NB : *Aucun document pédagogique n'est autorisé.
****La loi Normale Centrée Réduite est donnée au verso.***

Exercice n° 1. (10 points)

On mesure le poids de 200 pandas vivants à differentes altitudes, on trouve les résultats suivants :

Poids en Kgs	[70 ;80[	[80 ;90[	[90 ;100[	[100 ;110[	[110 ;120[
Effectifs	47	48	55	40	10

1. Définir la population statistique, le caractère étudié et sa nature.
2. Représenter graphiquement cette série statistique.
3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type.
4. Dresser le tableau des fréquences relatives cumulées.
5. Déterminer le mode, la médiane et l'écart interquartile.

Exercice n° 2. (06 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1), & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est une densité de probabilité ?
2. Déterminer dans ce cas l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, ayant f comme densité de probabilité.
3. Déterminer sa fonction de répartition.

Exercice n° 3. (04 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(1;1)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer les valeurs de α dans les trois expressions suivantes :

$$\alpha = p(-1,96 \leq X < 1,96), \quad p(X < \alpha) = 0,5 \quad \text{et } p(X \geq \alpha) = 0,43.$$

Bonne Chance

Intégrale $F(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad F(-t) = 1 - F(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Utilisation

On lit les décimales dans les lignes, et les centièmes en colonnes.
Par exemple, la valeur de $F(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05
- on trouve $F(1.65) = 0.9505$, à 10^{-4} près. Pour les valeurs négatives de t, on utilise la relation $F(-t) = 1 - F(t)$.

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie
$2^{ème}$ année LMD

Mardi 28/06/2016

Rattrapage de Biostatistique

Durée : 02 heures

NB : *Aucun document pédagogique n'est autorisé.
****La loi Normale Centrée Réduite est donnée au verso.***

Exercice n° 1. (10 points)

On mesure le poids de 200 pandas vivants à differentes altitudes, on trouve les résultats suivants :

Poids en Kgs	[70 ;80[	[80 ;90[	[90 ;100[	[100 ;110[	[110 ;120[
Effectifs	47	48	55	40	10

1. Définir la population statistique, le caractère étudié et sa nature.
2. Représenter graphiquement cette série statistique.
3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type.
4. Dresser le tableau des fréquences relatives cumulées.
5. Déterminer le mode, la médiane et l'écart interquartile.

Exercice n° 2. (06 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1), & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est une densité de probabilité ?
2. Déterminer dans ce cas l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, ayant f comme densité de probabilité.
3. Déterminer sa fonction de répartition.

Exercices au choix

Exercice n° 3. (04 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(1;1)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer les valeurs de α dans les trois expressions suivantes :

$$\alpha = p(-1,96 \leq X < 1,96), \quad p(X < \alpha) = 0,5 \quad \text{et}\, p(X \geq \alpha) = 0,43.$$

Exercice n° 4. (04 points)

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer P la matrice de passage.

Bonne Chance

Corrigé de Rattrapage 28/06/2016

Biostatistique

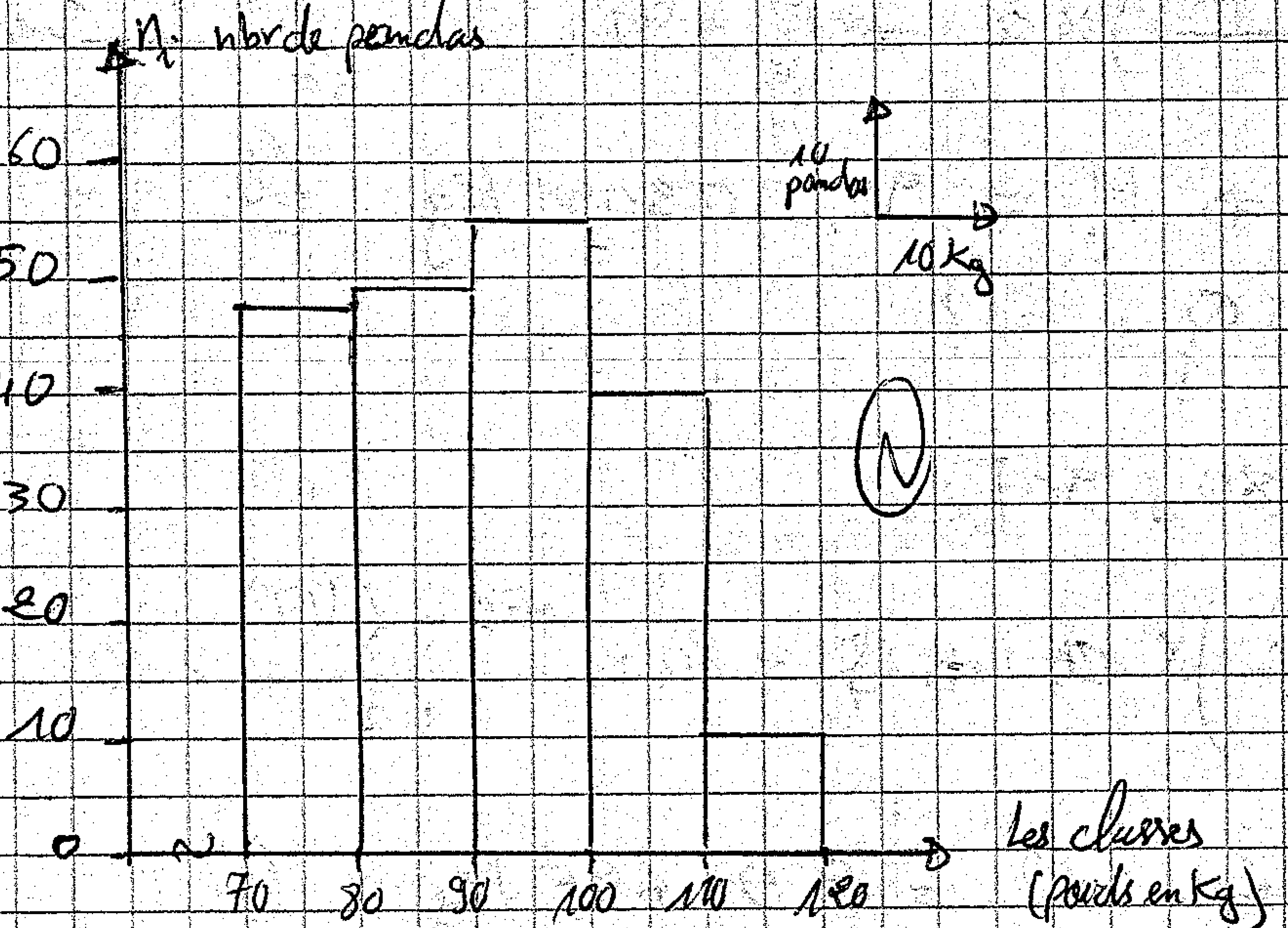
2015/2016

Exo n° 1 : 1) la population : les pandas (0,5)

le caractère : le poids (0,25)

sa nature : quantitatif continu (0,25)

2) la représentation graphique



l'Histogramme des effectifs

4) Le tableau des fréquences relatives cumulées

classes	N_i	F_i
moins de 70	0	0
" de 80	47	0,235
" de 90	95	0,475
" de 100	150	0,75
" de 110	190	0,95
" de 120	200	1

(1)

3) La moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i n_i c_i$

$$\bar{x} = \frac{1}{200} (47 \times 75 + 48 \times 85 + 55 \times 95 + 40 \times 105 + 10 \times 115)$$

$$\bar{x} = \frac{18\,180}{200} \Rightarrow \bar{x} = 90,9 \text{ kg}$$ (1)

La variance : $V(X) = \frac{1}{n} \sum_i n_i c_i^2 - \bar{x}^2$

$$V(X) = \frac{1}{200} (47 \times 75^2 + 48 \times 85^2 + 55 \times 95^2 + 40 \times 105^2 + 10 \times 115^2) - 90,$$

$$V(X) = \frac{1\,680\,800}{200} - 8\,262,81 \Rightarrow V(X) = 8404 - 8262,8$$

(1)

$$\Rightarrow V(X) = 141,19 \text{ kg}$$

l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{141,19}$

$$\sigma(X) = 11,882398$$ (0,5)

5) • Le mode : la classe modale [90 ; 100[

$$M_o = L_i + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)\times a \Rightarrow M_o = 90 + \frac{(55-48)}{(55-48)+(55-40)} \times 10$$

$$M_o = 90 + \frac{7}{7+15}\times 10 \rightarrow M_o = 90 + 3,18182$$

$$M_o = 93,18182 \text{ Kg}$$ (1)

• La médiane : la classe médiane [90 ; 100[

$$M_e = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum_i^{<n_{Me}} n_i}{n_{Me}}\right)\times a \Rightarrow M_e = 90 + \frac{100-(47+48)}{55}\times 10$$

$$M_e = 90 + 0,909091 \rightarrow M_e = 90,909091 \text{ Kg}$$ (1)

• l'écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = ?$

Q_1 : la classe de Q_1 [80 ; 90[

$$Q_1 = L_i + \left(\frac{\frac{n}{4} - \sum_i^{<n_{Q_1}} n_i}{n_{Q_1}}\right)\times a \Rightarrow Q_1 = 80 + \frac{50-(47)}{48}\times 10$$

$$Q_1 = 80 + 0,625 \rightarrow Q_1 = 80,625 \text{ Kg}$$ (1)

Q_3 : la classe de Q_3 [100 ; 110[

$$Q_3 = L_i + \left(\frac{\frac{3n}{4} - \sum_i^{<n_{Q_3}} n_i}{n_{Q_3}}\right)\times a \Rightarrow Q_3 = 100 + \frac{150-(47+48+55)}{55}\times 10$$

$$Q_3 = 100 + 0 \longrightarrow Q_3 = 100 \text{ Kg}$$ (1)

l'écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 100 - 80,625 = 19,375 \text{ Kg}$

$$Q_3 - Q_1 = 19,375 \text{ Kg}$$ (0,5)

Exo n°2 : on a $f(x) = \begin{cases} a \times (x+1) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où $a \in \mathbb{R}$

1) f est une densité de probabilité $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 a(x+1)\,dx = 1 \Leftrightarrow a\int_0^1 (x+1)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow a\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$ 1

2) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \Leftrightarrow E(X) = \int_0^1 \frac{2}{3}x(x+1)\,dx$

$$\Leftrightarrow E(X) = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^2 + x)\,dx \Leftrightarrow E(X) = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow E(X) = \frac{5}{9}$$ 1

la variance : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - E^2(X)$$

$$V(X) = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2(x+1)\,dx - E^2(X)$$

$$\Leftrightarrow V(X) = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^3 + x^2)\,dx - E^2(X)$$

$$\Leftrightarrow V(X) = \frac{2}{3}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow V(X) = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{12}\right) - \left(\frac{5}{9}\right)^2 \Leftrightarrow V(X) = \frac{13}{162}$$ 2

3) la fonction de répartition :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \cancel{\int_{-\infty}^{x} 0\,dt} = 0 & \text{si } x < 0 \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt} + \int_0^x \frac{2}{3}(t+1)\,dt & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt} + \int_0^1 \frac{2}{3}(t+1)\,dt + \cancel{\int_1^x 0\,dt} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$ 2

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ \frac{2}{3}\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3}\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right) & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

EXO n° 3 : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1;1)$

1) $\alpha = p(-1,96 \leq X < 1,96) = p\left(\frac{-1,96-1}{1} \leq \frac{X-1}{1} < \frac{1,96-1}{1}\right)$

$\alpha = p(-2,96 \leq Y < 0,96) = F_Y(0,96) - F_Y(-2,96)$

$\alpha = F_Y(0,96) + F_Y(2,96) - 1 = 0,8315 + 0,9985 - 1$

$\Rightarrow \alpha = 0,83$ 1

2) $p(X < \alpha) = 0,5 \Leftrightarrow p\left(\frac{X-1}{1} < \frac{\alpha-1}{1}\right) = 0,5$

$\Leftrightarrow p(Y < \alpha - 1) = 0,5$

$\Leftrightarrow F_Y(\alpha-1) = 0,5$

$\Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ 1,5

3) $P(X \geq \alpha) = 0,43 \Leftrightarrow 1 - P(X<\alpha) = 0,43$

$\Leftrightarrow p(X<\alpha) = 1 - 0,43$

$\Leftrightarrow p(X<\alpha) = 0,57$

$\Leftrightarrow p\left(\frac{X-1}{1} < \frac{\alpha-1}{1}\right) = 0,57$

$\Leftrightarrow F_Y(\alpha-1) = 0,57$ 1,5

$\Leftrightarrow \alpha - 1 = 0,18 \Leftrightarrow \alpha = 1,18$

l'autre Tableau $\alpha - 1 = 0,1764 \Leftrightarrow \alpha = 1,1764$

Ex n°4 : Les admissibles

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Les valeurs propres de M : $|M - \lambda I_3| = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \; = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda+2 & 0 & -2+\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\hookrightarrow C_1 \leftarrow C_1 + C_3$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2+\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-2+\lambda) \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ -1-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 3\lambda + 4) = 0 \iff (\lambda-2)(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0$$

0,5

$\iff \lambda = 2$ ou $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$\Delta = 25 \implies \lambda = -4$ ou $\lambda = 1$

donc les valeurs propres de M $\begin{cases} \lambda = 1 & \text{simple} \\ \lambda = 2 & \text{simple} \\ \lambda = -4 & \text{simple} \end{cases}$ 1,5

2) les trois valeurs propres sont différentes donc M est diagonalisable.

3) la matrice de passage P :

Les vecteur propres :

pour $\lambda = 1 \implies (M - I_3)X = 0$

$$\implies \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{et } x_1 = x_3 \\ \text{donc } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases}$$

Alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,5

pour $\lambda = 2$: $(M - 2I_3)X = 0 \iff$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_2 \\ \text{et } x_3 = -\frac{2}{3}x_2 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x_2 \\ x_2 \\ -\frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

0,5

pour $\lambda = -4$: $(M + 4I_3)X = 0 \iff$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_2 \\ x_3 = -\frac{2}{3}x_2 \end{cases}$$

0,5

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x_2 \\ x_2 \\ -\frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

d'où la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

0,5