

Chapitre I Rappels mathématiques

I- Grandeurs et unités

I.1- Grandeurs fondamentales

Ce sont les grandeurs pour lesquelles on a choisi des étalons. Elles sont indépendantes les unes des autres. Un étalon ne doit pas varier au cours du temps.

Exemple des grandeurs fondamentales : longueur, masse, temps

I.2- Grandeurs dérivées

Ces grandeurs s'expriment comme une combinaison (multiplication, division) des grandeurs fondamentales.

Exemple : Vitesse = longueur/temps

Accélération = longueur/temps x temps

Force = masse x accélération = masse x longueur/(temps)²

I.3- Système d'unités

On peut choisir quelques grandeurs pour constituer un système d'unités. Exp : CGS (centimètre, gramme, seconde), MKS (mètre, kilogramme, seconde).

Le système international (S.I) d'unité comporte trois grandeurs fondamentales.

Grandeur	symbole	Unité S.I	symbole	Définition
Longueur	L	mètre	m	Le mètre est une unité de longueur qui est calibrée par « la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 secondes ».
Masse	M	kilogramme	kg	Le kilogramme est une unité de masse qui est calibré par « la masse du prototype international en platine iridié, sanctionné par la conférence générale des poids et mesures en 1889 et déposé au bureau international des poids et mesures ».
Temps	T	seconde	s	La seconde est une unité de temps qui est calibrée par « la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 ».
Intensité du courant électrique	I	Ampère	A	L'ampère est une unité d'intensité de courant qui est calibrée par « un courant constant qui produit une force de 2.10 ⁻⁷ newton par mètre de longueur ». Ce courant doit être « maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide ».
Température thermodynamique	θ	kelvin	K	Le kelvin est une unité de température thermodynamique qui est calibré par « la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau ».
Quantité de matière	μ	mole	mol	La mole est une unité de quantité de matière d'une entité élémentaire donnée (atome, ion, molécule, électron, ..., ou des groupements spécifiés de telles particules.) qui est calibrée par « la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12 ».
Intensité lumineuse	J	candela	cd	La candela est une unité d'intensité lumineuse qui est calibrée par « l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.1012 hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian ».

En mécanique toutes les grandeurs utilisées peuvent être exprimées en fonction de la longueur, le temps et la masse.

Dimensions et unités de quelques grandeurs dérivées

Grandeur	symbole	dimension	symbole
Masse volumique	ρ	ML ⁻³	Kg/m ³
Débit volumique	q _v	L ³ T ⁻¹	m ³ .s ⁻¹
Viscosité dynamique	η	ML ² T ⁻¹	Pa.s
Quantité de mouvement	p	MLT ⁻¹	N.s ⁻¹
Fréquence	f	T ⁻¹	Hz
Période	T	T	s
Résistance électrique	R	ML ² T ⁻³ I ⁻²	Ω
Différence de potentiel	V	ML ² T ⁻³ I ⁻¹	volt
Champ électrique	E	MLT ⁻³ I ⁻¹	v/m
Champ magnétique	H	L ⁻¹ I	A.m ⁻¹
Capacité électrique	C	L ⁻² M ⁻¹ T ⁴ I ²	farad

I.4- Equation aux dimensions

Soit G une grandeur physique. La dimension de G est notée [G].

Si G est une longueur : [G] = L

Si G est une vitesse : [G] = L. T⁻¹

D'une manière générale, dans le S.I, l'équation aux dimensions d'une grandeur G s'écrit : $[G] = L^a \cdot M^b \cdot T^c \cdot I^d \cdot \theta^e \cdot \mu^f \cdot J^h$

Avec a, b, c, d, e, f et h sont des nombres réels.

Exemples : écrire les équations aux dimensions des grandeurs suivantes :

La vitesse : [V] = L. T⁻¹

L'accélération : [y] = L. T⁻²

La force : [F] = M.L. T⁻¹

L'énergie, le travail : [E] = [W] = M.L². T⁻¹

La surface : [S] = L²

Le volume : [V] = L³

I.4.1- Homogénéité d'une formule

- Une formule est homogène si les deux membres ont les mêmes dimensions.
- Il ne suffit pas qu'une formule soit homogène pour qu'elle soit juste.
- On ne peut additionner ni soustraire que les termes ayant les mêmes dimensions.

II. Les fonctions usuelles

a) *Polynômes* : $y = f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

b) *Trigonométriques* : $y = f(x) = \cos x$; $y = f(x) = \sin x$; $y = f(x) = \tan x$; $y = f(x) = \cotg x$

Propriétés :

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$
- $\sin(\alpha \mp \beta) = \sin \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha \mp \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$

c) *exponentielle* :

$y = e^x = \exp x$

d) *Logarithme* : n'est définie que pour $x > 0$

$y = \log x$; $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$; $\log(x_1 / x_2) = \log x_1 - \log x_2$

II.1- Dérivée d'une fonction

a) *fonction*

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

- $(x^a)' = a x^{a-1}$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(f + g)' = f' + g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(e^x)' = e^x$; $(\log x)' = \frac{1}{x}$

Exemple calculer la dérivée $\begin{cases} x = be^{-kt} \cos(\omega t) \\ y = be^{-kt} \sin(\omega t) \end{cases}$

b) *Dérivation multiple* :

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

II.2- Fonction à plusieurs variables**II.2.1- Dérivée partielle**

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

De même par rapport à y (x est constant)

II.2.2- Différentielle : on montre que $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

II.3- Intégrales : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)dx_i$

II.3.1- Primitives et intégrales : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

F est la primitive de f : $F'(x) = f(x)$

Intégrale par partie

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow [fg]_a^b - \int_a^b f'g dx$$

II.3.2- Changement de variable

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t))g'(t)dt$$

III. Incertitudes et erreurs

III.1- types d'erreurs

- *Erreurs systématiques* : Elles sont dues généralement aux appareils de mesures. Elles se produisent toujours dans le même sens. (réglage de l'instrument de mesure)
- *Erreurs aléatoires* : Dues généralement aux expérimentateurs et se produisent de part et d'autre de la valeur vraie.

III.2- Expression des erreurs :

a) *erreur absolue* : $e_a = |X_m - X_v|$

avec X_m est la valeur mesurée

et X_v est la valeur vraie (inconnue)

$$\text{Erreur relative} : e_r = \frac{|X_m - X_v|}{X_v}$$

b) *Incertitude absolue* : $\Delta X = \lim \sup |X_m - X_v|$

c) *Incertitude relative* : $\frac{\Delta X}{X_m} = \frac{|X_m - X_v|}{X_v}$

La précision de la mesure est donnée par la relation : $\varepsilon(\%) = 100 \bullet \frac{\Delta X}{X_m}$

III.3- Calculs d'erreurs :

a) Si la mesure d'une grandeur G se fait directement l'erreur globale est commise est la somme des erreurs dues à l'instrument (i), des erreurs systématiques (s) et des erreurs de lecture (l) soit :

$$\Delta G = \Delta G_i + \Delta G_s + \Delta G_l$$

b) Si la mesure de la grandeur G se fait indirectement où G est déduite des mesures des grandeurs X, Y, Z, l'incertitude peut être calculée par deux méthodes :

- différentielle totale : G est fonction à trois variables X, Y, Z $G = G(X, Y, Z)$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz$$

Pour passer aux incertitudes, on remplace le d par Δ et on met les valeurs absolues :

$$\Delta G = \left|\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right|\Delta x + \left|\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right|\Delta y + \left|\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)\right|\Delta z$$

Exemple : soit l'expression : $A = k \frac{x^m y^n}{z^p}$ où k est une constante et m, n et p sont des réels. Déterminer l'expression de

l'incertitude $\frac{\Delta A}{A}$ en fonction de $\Delta x, \Delta y$ et Δz

Réponse :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{k m x^{m-1} y^n}{z^p}; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{k n y^{n-1} x^m}{z^p}; \quad \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{k p x^m y^n}{z^{p+1}}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = m \frac{\Delta x}{x} + n \frac{\Delta y}{y} + p \frac{\Delta z}{z}$$

- dérivée de la fonction logarithmique

Pour mettre en évidence cette méthode, reprenons l'exemple ci-dessus.

$$\log A = \log k + m \log x + n \log y + p \log z$$

$$\frac{dA}{A} = m \frac{dx}{x} + n \frac{dy}{y} - p \frac{dz}{z}$$

On remplace dx, dy, dz, dA par $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta A$ et le signe (-) par le signe (+) puisque les incertitudes ne peuvent se compenser, soit :

$$\frac{\Delta A}{A} = m \frac{\Delta x}{x} + n \frac{\Delta y}{y} + p \frac{\Delta z}{z}$$

Exemple :

La période (T) d'un pendule simple est donnée par : $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ avec l est la longueur et g est l'accélération de la

pesanteur.

On donne $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ avec une précision de 0,1 % et $l = (0,5 \pm 0,002) \text{ m}$.

Réponse :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1,418 \text{ s}$$

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2} \log l + \frac{1}{2} \log g$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g} \right); \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{0,002}{0,5} + \frac{1}{1000} \right)$$

IV- Vecteurs

IV.1- Introduction

L'usage des vecteurs en mécanique est fondamental. Il permet de représenter les vitesses et les accélérations des points, les rotations des solides, les forces exercées, le déplacement...

IV.2- Notion de direction

Une ligne droite peut être parcourue dans deux directions. Une fois le sens positif est déterminé nous disons que la droite est orientée et nous l'appelons axe. On indique le sens positif par une flèche. Un axe définit une direction.

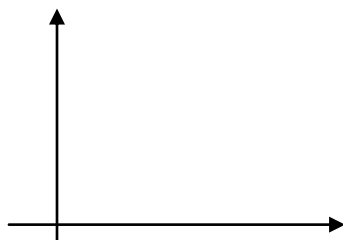


Figure 1 : axes x et y

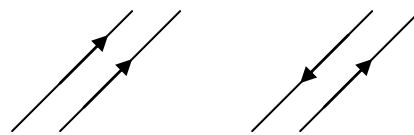


figure 2 : directions parallèles et anti-parallèles

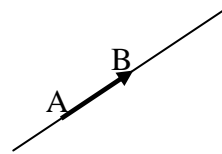
IV.3- Scalaire et vecteur

Beaucoup de quantités physiques sont complètement déterminées par leurs grandeurs ; ces quantités sont appelées scalaires. Comme le volume, la surface, l'énergie, le travail. D'autres grandeurs nécessitent pour leur détermination complète une direction en plus de leurs grandeurs. Nous appelons vecteurs de telles grandeurs. Le cas le plus évident le déplacement.

IV.4- Définition

Un vecteur est un segment de droite orienté. Il est caractérisé par

- le point d'application (le point A)
- une extrémité (le point B)
- une direction (droite Δ)
- un sens (indiqué par la flèche)
- un module (la longueur du segment [AB])



Deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont égaux s'ils ont la même intensité (longueur), la même direction et le même sens.

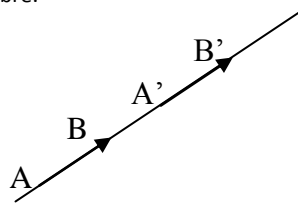
IV.5- Types de vecteurs

IV.5.1- Vecteurs liés – vecteurs libres

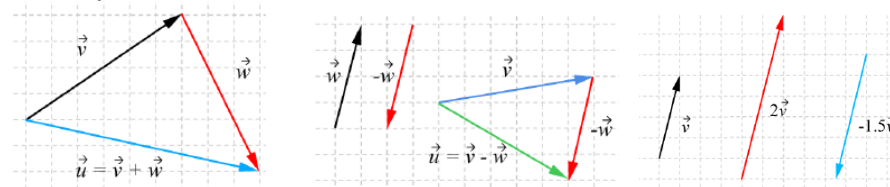
La distinction entre vecteurs libres et vecteurs peut se résumer : on peut dire qu'on n'effectue les opérations que sur des vecteurs libres tandis qu'on ne peut dessiner que des vecteurs liés.

IV.5.2- Vecteurs glissants

La représentation des forces fait appel au concept de vecteur glissant. Pour ce vecteur, le point d'application est n'importe où sur le support. Un ensemble de vecteurs liés équipollent à un vecteur lié. Il s'agit donc d'une représentation intermédiaire entre le vecteur lié et le vecteur libre.



IV.5.3- Opérations sur les vecteurs



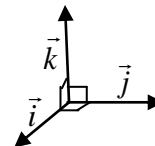
Si λ et μ sont deux scalaires et \vec{v} et \vec{w} sont deux vecteurs, on peut écrire :
 $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$; $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$; $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$; $1\vec{v} = \vec{v}$; $0\vec{v} = \vec{0}$

IV.6- Bases et composantes d'un vecteur

IV.6.1- Base orthonormée directe

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée si :

- $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ et $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$



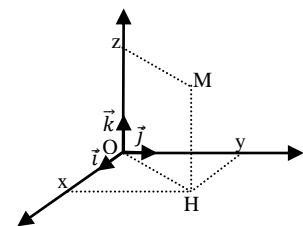
De plus si en faisant la rotation de \vec{i} vers \vec{j} , on progresse selon \vec{k} (règle du tire bouchon), on dit que la base est directe.

IV.6.2- Coordonnées cartésiennes d'un point – composantes d'un vecteur

Un vecteur a des composantes sur une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ainsi, on écrit :

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ également noté $\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On dit que les coordonnées

cartésiennes de M sont x, y et z. On écrit $M(x, y, z)$



IV.8-Calcul vectoriel

IV.8.1-Norme d'un vecteur

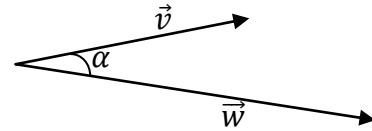
Si \vec{v} est un vecteur, on utilise le symbole $\|\vec{v}\|$ pour représenter la **norme** de \vec{v} .

Dans le plan muni d'un système orthonormé, si $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ on a : $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Un vecteur \vec{v} pour lequel la norme $\|\vec{v}\| = 1$ est qualifié de vecteur unité (ou **unitaire**).

IV.8.2- Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} est le nombre algébrique défini par la relation : $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$



Propriétés

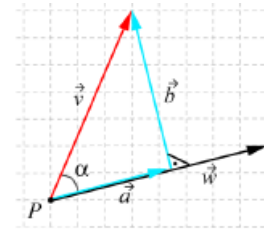
- $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si l'un au moins des deux vecteurs est nul ou Les deux vecteurs sont orthogonaux.
- $\alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w}$
- $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u}$
- En utilisant les composantes $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ alors $\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

IV.8.3- Angle entre deux vecteurs

L'angle α entre deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} est donné par $\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

IV.8.4- Projection d'un vecteur sur un autre vecteur

Soient \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs non nuls ayant la même origine P. Nous cherchons à décomposer \vec{v} en deux vecteurs : \vec{a} qui sera parallèle à \vec{w} et \vec{b} qui sera orthogonal à \vec{w} . Le vecteur \vec{a} est la **projection orthogonale** de \vec{v} sur \vec{w} : $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$



La longueur du vecteur \vec{v} projeté orthogonalement sur \vec{w} est $\|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$

Attention ! cette propriété est très utile pour la décomposition d'un vecteur sur une base

IV.8.5- Produit vectoriel

Soient deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} formant un angle α . Par définition, le **produit vectoriel** de \vec{a} et \vec{b} est le vecteur noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tel que :



1. La direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est **orthogonale** à chacun des deux vecteurs \vec{a} et \vec{b}
 2. le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ donne au triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ une **orientation directe** ;
 3. la norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est égale à l'**aire du parallélogramme** construit sur \vec{a} et \vec{b} : $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin \alpha|$
- Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est donc un vecteur nul.

Propriétés

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \wedge \vec{a}$
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

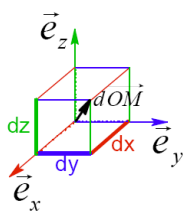
Expression analytique

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$

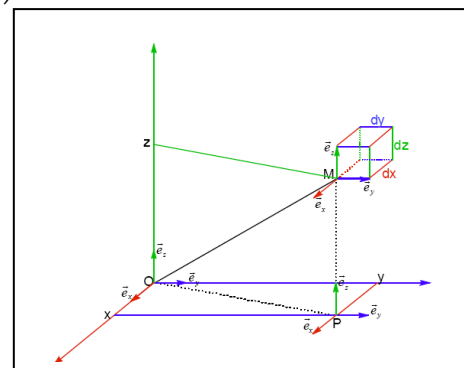
V. Systèmes de coordonnées

V.1- Coordonnées cartésiennes

Coordonnées : x : abscisse ; y : ordonnée et z : côte



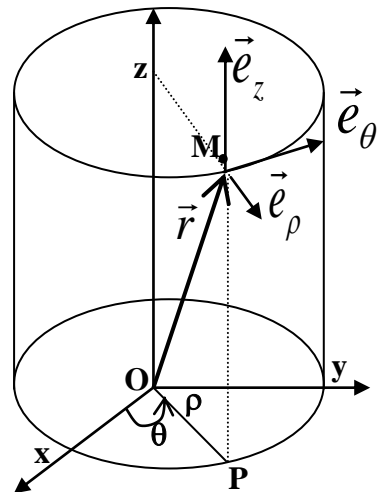
$$d\vec{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$



V.2- Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques du point sont définies par : $OP = \rho \geq 0$ et θ est l'angle entre (Ox, OP) avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Ce système de coordonnées permet de recouvrir tout l'espace une fois et une seule, en respectant les intervalles définis pour ρ et θ . Un triplet de nombres, ρ, θ, z correspond à un point de l'espace et un seul ; cependant la réciproque n'est pas vraie, car pour les points de l'axe Oz ($\rho = 0$) l'angle θ reste indéterminé.



V.2.1- Base locale des coordonnées cylindriques

\vec{e}_ρ est un vecteur unitaire perpendiculaire au cylindre d'axe Oz passant par M , indiquant la direction des ρ croissants.

\vec{k} est un vecteur unitaire porté par Oz

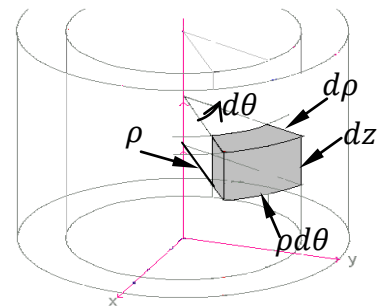
\vec{e}_θ est un vecteur unitaire normal au plan défini par \vec{e}_ρ et \vec{k} , et tel que $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ forme un trièdre direct.

V.2.2- Correspondance avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{et à } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad \text{l'élément de surface : } dS = \rho d\rho d\theta$$

l'élément de la surface latérale du cylindre : $dS = \rho d\theta dz$



Attention, θ n'est défini qu'à $k\pi$ près

Attention, cette dernière équation peut poser des problèmes, la valeur de θ est à moduler en fonction du signe de x et de y.

V.2.3- Cas particulier : coordonnées polaires

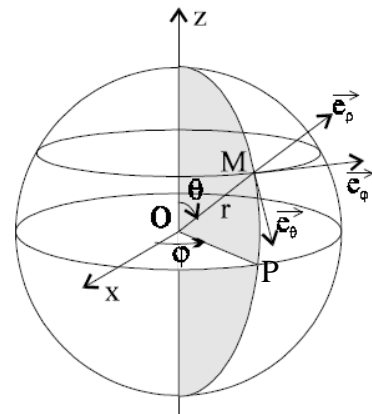
Lorsque $z = 0$, on parle de coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan.

V.3- Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques du point sont définies par : $OM = r$

; $(Ox, OP) = \varphi, OP$ avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $(Oz, OM) = \theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$

Ce système de coordonnées permet de recouvrir tout l'espace une fois et une seule, en respectant les intervalles définis pour r, θ et φ . Un triplet de nombres, (r, θ, φ) correspond à un point de l'espace et un seul ; cependant la réciproque n'est pas vraie, car pour les points de l'axe Oz ($\theta = 0$, ou $\theta = \pi$) l'angle φ reste indéterminé.



V.3.1- Base locale des coordonnées sphériques

\vec{e}_r est un vecteur unitaire tel que $\vec{OM} = r\vec{e}_r$

\vec{e}_θ est dans le plan méridien de M , directement perpendiculaire à \vec{e}_r et \vec{e}_φ est donc un vecteur tangent au cercle passant par M de centre O , ou méridien passant par M

\vec{e}_φ est un vecteur unitaire tel que le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit un trièdre direct.

Propriété : \vec{e}_φ est un vecteur tangent au cercle passant par M et parallèle au plan (xoy) .

V.3.2- Correspondance avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

L'élément de surface : $dS = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$

L'élément de volume : $dV = dr \cdot (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta) = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$

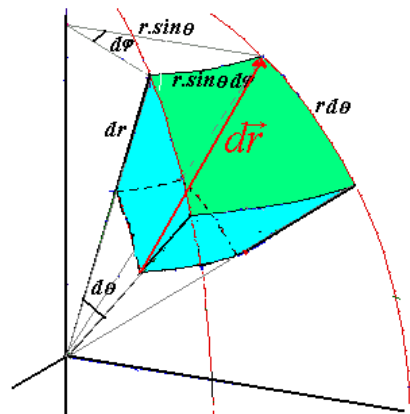
VI. Opérateurs vectoriels

VI.1- Gradient : le gradient d'une fonction f est le vecteur :

$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

En coordonnées cylindriques : $\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

En coordonnées sphériques : $\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$



VI.2- Divergence : la divergence d'un vecteur $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ est un

$$\text{scalaire } \text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques : $\text{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

en coordonnées sphériques $\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

VI.3- Rotationnel : Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ est un

$$\text{vecteur } \overrightarrow{\text{rot}\vec{A}} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} (A_\theta + \rho \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}) \vec{k}$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}) \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$

VI.4- Laplacien :

Le laplacien d'une fonction f est

En coordonnées cartésiennes : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} +$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$