Chapitre II
Cinématique du point

I.- Généralités

I.1- Définition : La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans leurs rapports avec le temps, indépendamment des causes de ces mouvements (décrire les mouvements des corps sans chercher à les interpréter).

Point matériel : un point matériel est un corps dont la totalité de la masse est concentrée en un point.

I.2- Notion de trajectoire : La succession au cours du temps, des points (des lieux occupés par le point matériel) constitue une courbe appelée trajectoire.

I.3-Repère d'espace : Un repère est un système d'un point et de trois axes permettant de repérer un point matériel. Par exemple le repère cartésien (Oxyz).

I.4- Référentiel : Un référentiel R est un ensemble rigide de points considérés fixes par rapport auquel on se place pour étudier le mouvement d'un point matériel (association d'une horloge et d'un repère).

I.5- Repère du temps : Il est constitué d'un instant d'origine et d'une échelle de temps. Le temps est une notion absolue, c'est-a-dire indépendante du référentiel d'étude : ainsi, deux observateurs lies a des référentiels différents attribuent les mêmes dates aux mêmes événements.

I.6- Position : La position d'un objet est définie comme la donnée, dans un système de référence, d'une ou de plusieurs valeurs numériques : les coordonnées.

I.7- Déplacement : La position dépend du paramètre temps t : $\overrightarrow{OP}(t)$. Le déplacement correspond au changement de position. A l'instant t_1 la position est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP}(t_1)$, plus tard, à l'instant t_2, la position est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP}(t_2)$. Il est assez naturel de considérer le déplacement $\overrightarrow{d_{12}}$ comme le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$.
De même si le point continue à se déplacer on définit les déplacements successifs : $\overrightarrow{d_{23}}, \overrightarrow{d_{34}}, \overrightarrow{d_{45}}$. On peut aussi calculer le déplacement $\overrightarrow{d_{13}}$ entre P₁ et P₃ par exemple.

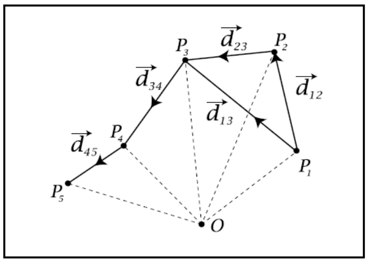


Figure 1

II- Mouvement rectiligne : Le mouvement d'un corps est rectiligne si sa trajectoire est une droite.

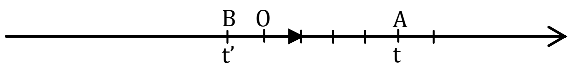


Figure 2

II.1 Position : à un instant t, le mobile se trouve en A d'abscisse x_A=x(t) (le vecteur position $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{\imath}$ ($x_A = 4$ *dans la figure* 2) et à un instant t', le mobile se trouve en B (x_B=x(t')) le vecteur position $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{\imath}$ ($x_B = -1$ *dans la figure* 2).

Le déplacement entre A et B est donné par le vecteur $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath}$ (ou $\overrightarrow{\Delta x}$) (sur la figure $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -4\vec{\imath} - 1\vec{\imath} = -5\vec{\imath}$).

II.2- Vitesse

II.2.1- Vitesse moyenne

La vitesse moyenne entre A et B (figure 1) :

$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{(x_B - x_A)\vec{\imath}}{\Delta t}$ C'est un vecteur colinéaire au vecteur déplacement.

II.2.2- Vitesse instantanée :

Pour définir la vitesse instantanée, il faut que le point B soit très proche de A (figure) autrement dit la différence de temps doit être très petite (infinitésimale).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_{moy}} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}$$

Si la vitesse est constante (ne dépend pas du temps), on dit que le mouvement est uniforme.

Si la vitesse est donnée en fonction du temps $v = v(t)$ l'abscisse x peut être déterminée en utilisant la relation :

$v = \frac{dx}{dt} \to dx = vdt \to \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt \to x = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt$

Exemple : Une particule se déplace suivant l'axe des OX telle que sa position est donnée par : $x(t) = 5t^2 + 1$
Calculer la vitesse moyenne dans les intervalles a) 2 s et 3 s b)2s et 2,1s c)2s et 2,0001s d) 2s et 2,00001s
2) Calculer la vitesse instantanée à 2s

II.2.3- Accélération :

L'accélération moyenne entre A (vitesse instantanée est $\vec{v}(t_1)$)et B ($\vec{v}(t_2)$)(voir figure 1) est $\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$

II.2.4-Accélération instantanée : Donner par la relation $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{a_{moy}} = \frac{dv}{dt}\vec{\imath} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath}$

Si l'accélération instantanée est donnée en fonction du temps $a(t)$, la vitesse se calcule en intégrant l'accélération:

$$a = \frac{dv}{dt} \to dv = adt \to \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt \to v = v_0 + \int_{t_0}^{t} adt$$

Si elle est exprimée en fonction de l'abscisse $a(x)$, on écrit :

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = adt \rightarrow vdv = vadt = adt\frac{dx}{dt} = adx \rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx \rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} adx$$

Exemple : On donne $a = 4x - 2\ et\ v_0 = \frac{10m}{s}\ en\ x_0 = 0$, trouver l'expression de la vitesse.

Remarque : Le mouvement est accéléré si $\vec{v}.\vec{a} > 0$ (la vitesse et l'accélération ont le même sens)(figure 3)

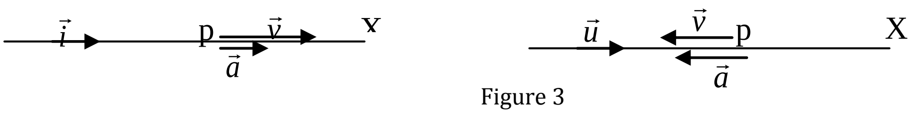


Figure 3

Le mouvement est retardé si $\vec{v}.\vec{a} < 0$ (la vitesse et l'accélération ont des sens opposés)(figure 4)

Figure 4

II.3- Mouvement rectiligne uniforme :

Dans ce cas, la vitesse est constante (ne dépend pas du temps) $v(t) = v_0 = cte$, par conséquent : $a = \frac{dv_0}{dt} = 0$ et $v_0 = \frac{dx}{dt}$. En intégrant : $\int_{t_0}^{t} v_0 dt = \int_{x_0}^{x} dx \rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$

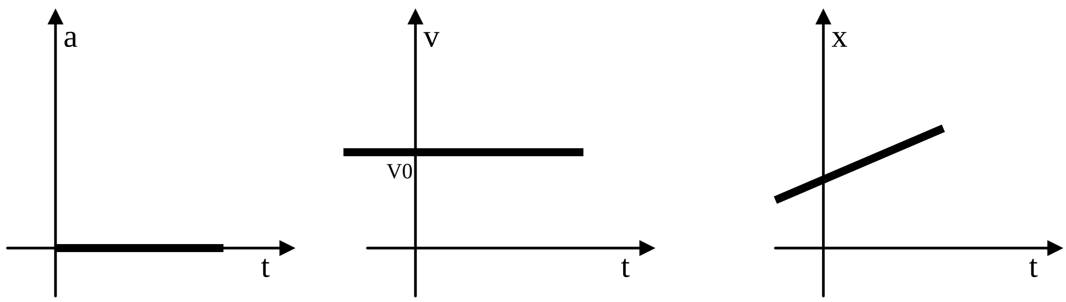


Figure 5 : diagrammes $a(t), v(t) et\ x(t)$ dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme

II.4- Le mouvement rectiligne uniformément accéléré :

Dans ce cas, l'accélération est constante ($a(t) = a_0 > 0$) par conséquent :

- $\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = a_0 \rightarrow \int_{t_0}^{t} a_0 dt = \int_{v_0}^{v} dv \rightarrow v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) avec\ v_0 = v(t_0)}$ **(2)**
- $\boldsymbol{v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0(t - t_0) \rightarrow \int_{x_0}^{x} dx =}$
  $\boldsymbol{\int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a_0(t - t_0)dt}$ $\rightarrow$ ***ce qui donne*** $\boldsymbol{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2}$ **(3)**

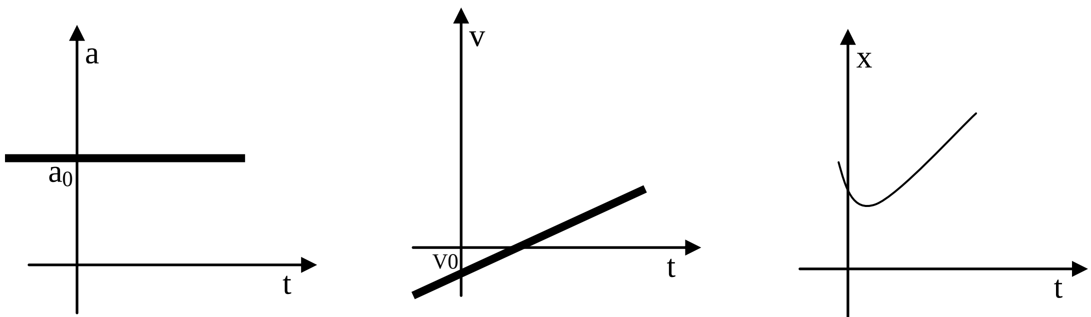


Figure 6 : diagrammes $a(t), v(t) et\ x(t)$ dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme accéléré

De (2), on tire $t - t_0 = \frac{v - v_0}{a_0}$ (4)

On injecte (4) dans (3) : $\boldsymbol{x(t) - x_0 = v_0\frac{v - v_0}{a_0} + \frac{1}{2}a_0\left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{2a}\left(v(t)^2 - v_0^2\right) ou\ bien\ v(t)^2 - v_0^2 = 2a(x(t) - x_0)}$

Exemple :

Un corps mobile M quitte un point O avec une vitesse initiale de 10 m/s et une accélération -2m/s², suivant un même axe.

a) Trouver les expressions de la vitesse et de la position de M aux temps ultérieurs.
b) Quelle est la position extrême de M dans la direction positive ? A quel instant l'atteint-il ?
c) Quand M repasse t-il par O ?

III. Mouvement dans l'espace

II.3.1- Repérage du mobile

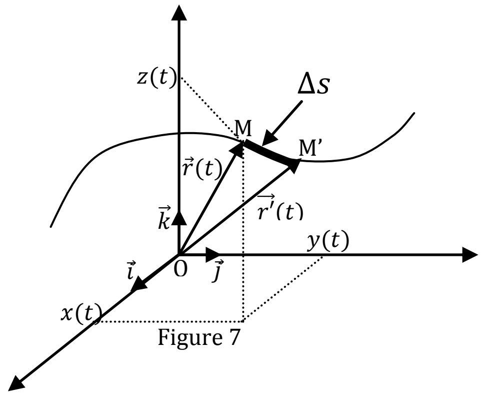


Figure 7

Dans le cas d'une trajectoire quelconque dans l'espace A trois dimensions, la position est directement déterminée par son vecteur position $\vec{r}(t)$ à chaque instant t.

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

On parle alors de mouvement curviligne (mouvement dans l'espace).

A un instant t', le mobile est en M' avec :

$$\vec{r'} = \vec{r}(t') = \overrightarrow{OM'}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r'} - \vec{r} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MM'}$$

Entre les instant t et t' la particule a parcourue **l'arc** $MM' = \Delta s$

II.3.2- Vitesse moyenne :

La vitesse moyenne $\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$

La vitesse moyenne est représentée par un vecteur parallèle au déplacement. (figure 8)

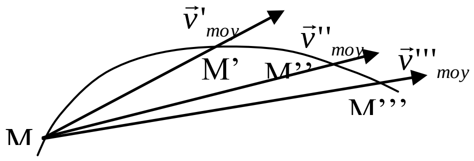


Figure 8

II.3.3- Vitesse instantanée :

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{\boldsymbol{v_{moy}}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}) - \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{dt}}$$

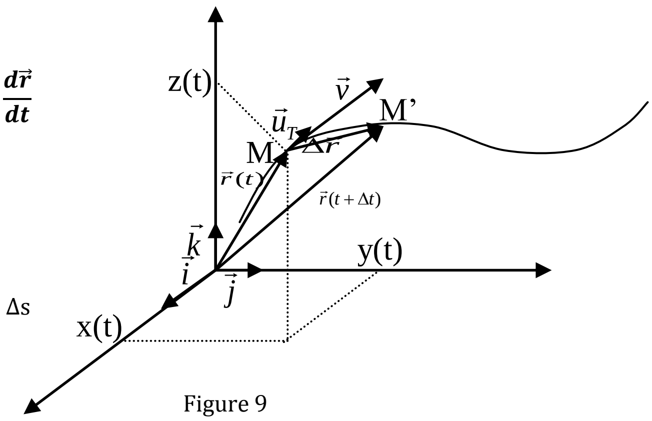
C'est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

Le module du vecteur vitesse est $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Lorsque la particule se déplace de M en M', le déplacement Δs suivant la courbe est donnée par la longueur de l'arc MM'.



$$\vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \mathbf{lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta \boldsymbol{t}}\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \boldsymbol{s}} = \mathbf{lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta \boldsymbol{t}} \mathbf{lim}_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \boldsymbol{s}} = \boldsymbol{v}\overrightarrow{\boldsymbol{u_T}}$$

Figure 9

<u>$\overrightarrow{u_T}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire</u>. La vitesse instantanée est donc un vecteur tangent à la trajectoire de module égal à $\frac{ds}{dt}$.

II.3.4- L'accélération instantanée

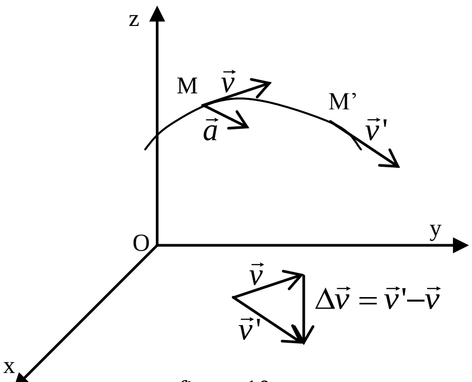


figure 10

La vitesse dans un mouvement curviligne change à la fois de grandeur et de direction.

L'accélération moyenne dans l'intervalle de temps Δt est le vecteur : $\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

L'accélération instantanée : $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{a_{moy}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

L'accélération est toujours dirigée vers la **concavité de la courbe**. Les composantes du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes sont :

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ et $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ et le module du vecteur accélération est : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Si l'accélération du point matériel est donnée en fonction du temps $\vec{a}(t)$ l'expression du vecteur vitesse peut être déduite à partir de la relation :

$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$ et la position par $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$

II.3.4- Composantes normales et tangentielles de l'accélération

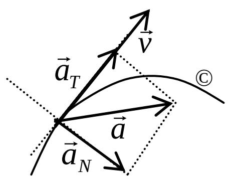


Figure 11

On peut décomposer l'accélération en une composante **tangentielle** qui indique le changement du **module** de la vitesse et une composante **normale** qui indique le changement de **direction** de la vitesse.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\overrightarrow{u_T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + v\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Si la trajectoire est une droite (direction fixe), $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = \vec{0}$.

Comme la direction de $\overrightarrow{u_T}$ varie le long de la courbe, la dérivée de ce dernier n'est pas nulle ($\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} \neq \vec{0}$).

Soit $\overrightarrow{u_N}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{u_T}$ et dirigé vers la concavité de la courbe (de la trajectoire).

Les vecteurs $\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{u_N}$ forment une base orthonormée appelée base de Frenet (ou base intrinsèque). C'est une base mobile qui suit le point matériel dans son mouvement :la direction de chacun des deux vecteurs change à chaque instant, sauf dans le cas d'un mouvement rectiligne.

$\overrightarrow{u_T} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u_N} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$

$\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = (-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath})\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_N}$ (voir exercice 6 série 1).

D'autre part, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\theta}{ds}$ (avec $ds = \widehat{MM'}$)

Or d'après la figure 12 :$\tan\theta \approx d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{R}$

Donc $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$

et par conséquent $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = \frac{v}{R}\overrightarrow{u_N}$

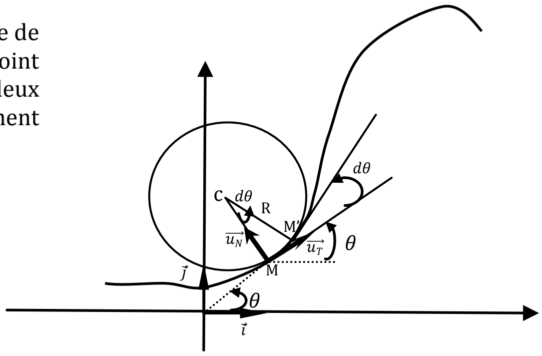


figure 12

Finalement la relation (1) s'écrit : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\overrightarrow{u_T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$ (composante tangentielle plus composante normale).

$\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$ avec $v = \|\vec{v}\|$

On peut écrire donc : $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$

Et $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$

Si le mouvement est curviligne uniforme (vitesse constante en module), l'accélération tangentielle est nulle. D'autre part si le mouvement est rectiligne (rayon infini) l'accélération normale est nulle (pas de changement de direction de la vitesse).

II.4- Mouvement circulaire

La vitesse est tangente au cercle. Elle est perpendiculaire en chaque point du cercle à la droite joignant ce point et le centre du cercle. L'abscisse curviligne est donnée par la relation : $S = R\theta$ La vitesse linéaire $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$

La quantité $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est appelée vitesse angulaire (en rad/s).

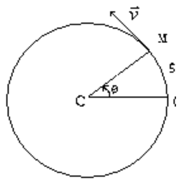


Figure 13

Alors la vitesse linéaire $v = \omega R$

De la figure de ci-contre (Figure 14), on peut remarquer que :

$R = r\sin\gamma$ et $v = r\omega\sin\gamma$.

Ce qui s'écrit : $\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.

Pour un mouvement circulaire uniforme (vitesse angulaire constante), le mouvement est périodique de période T : temps nécessaire pour faire un tour complet. Dans ce cas on peut écrire : $\omega = \frac{d\theta}{dt} \to \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t}\omega dt \to \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$.

Si $\theta_0 = 0$ pour $t_0 = 0$, on a $\omega = \frac{\theta}{t}$

Pour un tour complet $t = T\ et\ \theta = 2\pi$ donc $\omega = \frac{2\pi}{T}$

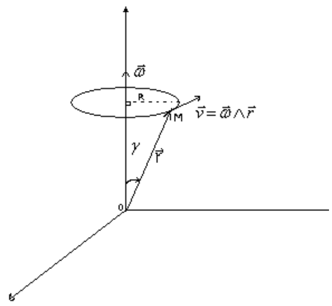


Figure 14

II.4.1- Accélération angulaire

Lorsque la vitesse angulaire d'un point matériel varie au cours du temps, l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ est donnée par : $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

L'accélération tangentielle est donnée par la relation $\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} = \frac{d(R\omega)}{dt}\overrightarrow{u_T} = R\frac{d\vec{\omega}}{dt} = R\vec{\alpha}$

L'accélération normale $\overrightarrow{a_T} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N} = R\omega^2\overrightarrow{u_N}$.

Pour un mouvement circulaire uniforme $\overrightarrow{a_T} = 0$

Dans ce cas $\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$ et donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{v} = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{v})$

II.5- Etude du mouvement dans les différents systèmes de coordonnées

II.5.1- Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

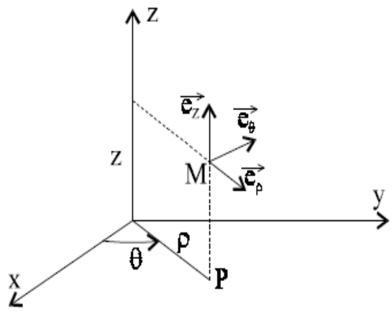


Figure 14

Vecteur position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}$

Déplacement élémentaire (voir chapitre I) : $d\vec{r} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\vec{k}$

Surface élémentaire (voir chapitre I) :

- Surface latérale : $dS = \rho d\theta dz$
- Surface du disque : $dS = \rho d\rho d\theta$

Attention ! Ces notions sont très importantes en électrostatique.

La vitesse :

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}\right) = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$\vec{v} = \dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot z\vec{k}$$

Accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot z\vec{k}\right)$

$$\vec{a} = \frac{d\dot\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \dot\rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \rho\frac{d\dot\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\dot\theta\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} + \frac{d\dot z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\overrightarrow{e_\theta}$$

II.5.2- Etude du mouvement en coordonnées sphériques

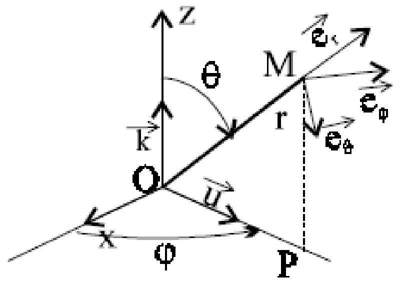


Figure 15

Position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

Déplacement élémentaire : $d\vec{r} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + (r\sin\varphi\, d\theta)\overrightarrow{e_\varphi}$

Surface élémentaire : Voir Chapitre I

La vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}$

Or $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{u}$

$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{u}$

$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

Avec $\vec{u} = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$ **(Voir exercice 7 de la série 1)**

$$\frac{d\vec{u}}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} = \overrightarrow{e_\varphi}$$

Comme : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{k} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\frac{d\vec{u}}{dt}$

Et $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$

Alors : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{u}) + \sin\theta\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} = \dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$

Ce qui donne $\vec{v} = \dot r\overrightarrow{e_r} + r\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{r}\dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$

Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot r\overrightarrow{e_r} + r\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{r}\dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi})$$

$$\vec{a} = \ddot r\overrightarrow{e_r} + \dot r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \ddot r\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot r\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot r\theta\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} + \dot r\dot\varphi sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} + r\ddot\varphi sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} + r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} + r\dot\varphi sin\theta\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot\theta\cos\theta\,\vec{k} - \dot\theta\sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\frac{d\vec{u}}{dt} = -\dot\theta\left(\cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{u}\right) + \dot\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} = -\dot\theta\overrightarrow{e_r} + \dot\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot\varphi\vec{u} = -\dot\varphi(\cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_r})$$

Finalement l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\boldsymbol{\vec{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2 sin^2\theta\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} + (2r\dot\theta\dot\varphi\sin\theta + 2r\dot\theta\dot\varphi\sin\theta)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

II.6- Vecteur rotation :

II.6.1- Définition :

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\overrightarrow{OM}/R}$ ou vecteur vitesse de rotation instantanée du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au repère R est le vecteur défini par :

- Sa direction est portée par l'axe de rotation instantanée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à R.
- Sa norme (module) est proportionnelle à la vitesse angulaire de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à R :

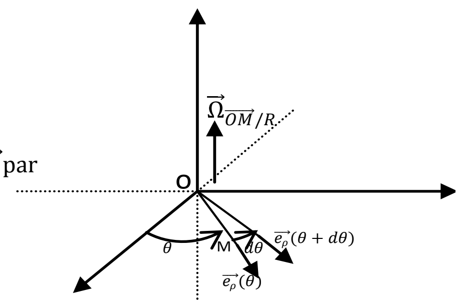


Figure 16

- Dans le cas d'une rotation autour de l'axe OZ: $\vec{\Omega}_{\overrightarrow{OM}/R} = \dot{\theta}\vec{k}$ et $\vec{\Omega}_{\overrightarrow{OM}/R} \wedge \vec{e_\rho} = \frac{d\vec{e_\rho}}{dt}$

Nous pouvons généraliser ce résultat pour tout vecteur unitaire lié à M.

II.7-Mouvements relatifs

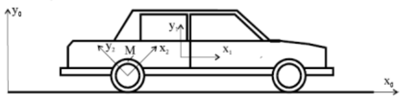
II.7.1- Changement de référentiel

Supposons que la vitesse et l'accélération d'un point mobile M sont connues par rapport à un référentiel donné. On veut déterminer la vitesse et l'accélération par rapport à un autre référentiel.

Exemple (voir figure 17)

Intéressons nous au mouvement d'un point de la roue par rapport :

- A la roue : Référentiel R_2 (repère $O_2X_2Y_2$)
- A la voiture : Référentiel R_1 (repère $O_1X_1Y_1$)
- Au sol : Référentiel R_0 (repère $O_0X_0Y_0$)



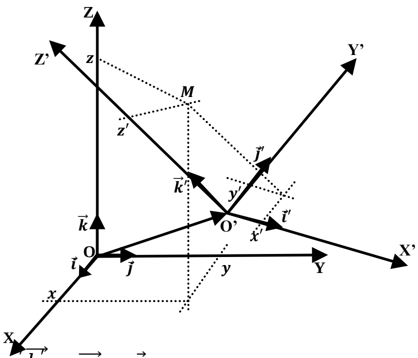
Nous remarquons que M est :

- Fixe par rapport à la roue. Référentiel R_2
- Décrit un cercle par rapport au véhicule. Référentiel R_1
- Par rapport au sol le point M décrit un cycloïde.

Figure 17

Soit un point matériel M observé par rapport à un référentiel R (repère Oxyz muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$+ le temps). On dira que ce référentiel permet d'observer le mouvement absolu du mobile (R est le référentiel absolu). Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont **fixes**.

Soit un second référentiel R' (repère o'x'y'z' muni de la base $(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$. R' est appelé référentiel relatif, en mouvement quelconque par rapport au repère absolu R. les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}$ et $\vec{k'}$ ne sont pas fixes.



Nous pouvons écrire :

	Dans (Oxyz)	**Dans (O'x'y'z')**
La position	$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$
La vitesse	$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \vec{v_a} = \vec{v}_{M/R}$	$\vec{v'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x'}\vec{i'} + \dot{y'}\vec{j'} + \dot{z'}\vec{k'} = \vec{v_r} = \vec{v}_{M/R'}$
L'accélération	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{a_a} = \vec{a}_{M/R'}$	$\vec{a'} = \ddot{x'}\vec{i'} + \ddot{y'}\vec{j'} + \ddot{z'}\vec{k'} = \vec{a_r} = \vec{a}_{M/R'}$

Pour un observateur du référentiel R, le mouvement de R' est connu par l'intermédiaire du mouvement de O' par rapport à O ($\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$) et de la façon dont les axes de O'X', O'Y' et O'Z' tournent autour de O' soit ($\frac{d\vec{i'}}{dt}, \frac{d\vec{j'}}{dt}, \frac{d\vec{k'}}{dt}$).

II.7.2- Relation entre les positions :

Nous remarquons que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

D'une manière explicite on écrit : $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0'\vec{i} + y_0'\vec{j} + z_0'\vec{k}) + (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})$

II.7.3- Relation entre les vitesses :

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{v_a} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right] + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) = (\vec{v}_{O/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \vec{v}_{M/R'}$$

Soit $\boldsymbol{\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}}$

$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/R}$ est la vitesse relative (vitesse de M dans R').

$\vec{v}_e = \vec{v}_{R'/R}$ est la vitesse d'entrainement de R' par rapport à R. elle peut être considérée comme la vitesse absolue qu'aurait M dans R si ces coordonnées dans R' étaient constantes. Autrement dit, cette vitesse est nulle si R et R' sont fixes l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas les deux observateurs mesurent la même vitesse.

Si R' est en mouvement de translation uniforme (**pas de rotation**) par rapport au référentiel R, les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}$ et $\vec{k'}$ ne tournent pas (constants), la vitesse d'entrainement est indépendante du point M : $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

II.7.4- Relation entre les accélérations

$$\vec{a_a} = \frac{d\vec{v_a}}{dt} = \left(\ddot{x'}\vec{i'} + \ddot{y'}\vec{j'} + \ddot{z'}\vec{k'}\right) + \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right) + 2(\dot{x'}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \dot{y'}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt})$$

Cette formule peut être réécrite sous la forme plus simple : $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$

Avec $\vec{a_r}$ accélération relative, $\vec{a_e}$ accélération d'entraînement (c'est l'accélération qu'aurait M dans le repère absolu s'il était immobile par rapport à R') et $\vec{a_c}$ accélération de Coriolis. Cette dernière s'annule si :

- Le mobile est fixe par rapport à R'
- R'est en mouvement de translation par rapport à R.

Lorsque R' est en mouvement de translation uniforme par rapport à R on a l'accélération absolue est égale à l'accélération relative. Donc les deux observateurs mesurent la même accélération.