Chapitre III
Dynamique du point

I- Introduction
I.1- Définition
La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent. Donc on peut dire que le mouvement est un résultat direct de l'interaction d'un corps avec les objets qui l'entourent.

Exemple

La trajectoire d'un projectile n'est autre que le résultat de son interaction avec le Terre. Les interactions entre les corps sont décrites d'une manière convenable par une notion mathématique appelée **force.** *La dynamique peut être définie donc comme une relation qui existe entre les forces et les variations du mouvement.*

II- Principe d'inertie (première loi de Newton)
II.1- Particule libre
Une particule libre est celle qui n'est soumise à aucune interaction. Une telle particule n'existe pas réellement. Pour qu'elle existe elle doit être complètement isolée, soit la seule au monde, et donc impossible de l'observer (l'observateur perturbe la mesure par sa présence). Néanmoins, on peut supposer (avec une bonne approximation) qu'une particule suffisamment éloignée des autres particules ou si la résultante de son interaction avec les autres particules est nulle comme une particule isolée.

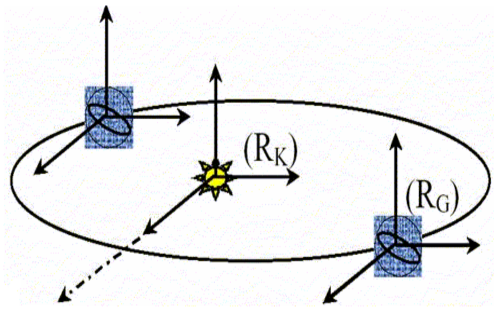
II.2- Enoncé du principe d'inertie
Une particule libre se déplace toujours avec une vitesse constante. Autrement dit, la particule isolée soit elle se déplace sur une ligne droite avec une vitesse constante, soit elle est immobile.

Comme le mouvement est une notion relative (des observateurs dans des référentiels différents n'observent pas le même mouvement). A qui ou à quoi est rapporté le mouvement de la particule libre dans le principe d'inertie ?

II.3- Référentiels galiléens
C'est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est valable. Dans ce référentiel, le mouvement d'une particule isolée est rectiligne et uniforme.

- Tout système se déplaçant à vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie est également un référentiel d'inertie. Si l'accélération d'une particule est nulle dans un référentiel d'inertie elle est nulle dans tous les autres référentiels d'inertie.

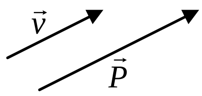
II.3.1- Exemple de référentiels d'inertie
- *Référentiel héliocentrique de Kepler (R_K):*
  - Origine : centre de masse du soleil.
  - Axes dirigés vers étoiles fixes.
- *Référentiel de Copernic*
  - origine : centre de masse du système solaire
  - Axes dirigés vers trois étoiles fixes
- *Référentiel géocentrique (R_G)*
  - origine centre de masse de la Terre
  - Axes dirigés vers trois étoiles fixes



Ce référentiel est surtout utilisé pour l'étude du mouvement des satellites.

- *Référentiel Terrestre ou du laboratoire*
  - Origine : un point de la surface de la terre.
  - Axes perpendiculaires deux à deux.

III- La quantité de mouvement



Plus la masse d'une particule est importante, plus il est difficile de modifier son vecteur vitesse (un camion chargé en mouvement est plus difficile à arrêter ou à accélérer qu'un camion vide ayant la même vitesse).

La masse caractérise l'inertie d'un corps : résistance que le corps oppose à tout changement provoqué de vitesse (elle n'intervenait pas en cinématique).

La quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par sa vitesse $\vec{P} = m\vec{v}$

La notion de quantité de mouvement est très importante en physique car elle combine les éléments qui caractérisent l'état dynamique d'une particule : sa masse et sa vitesse.

Le principe d'inertie peut s'énoncé : *une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un référentiel d'inertie.*

III.1- Conservation de la quantité de mouvement :
Soient deux particules M1 et M2 de masses m_1 et m_2 respectivement **isolées** du monde. Elles ne sont soumises qu'à leur interaction mutuelle. Leurs vitesses individuelles ne sont donc pas constantes et leurs trajectoires sont généralement courbées.

A l'instant t, la particule M1 se trouve en un point A et animée d'une vitesse $\vec{v}_1$. La particule M2 se trouve en un point B avec une vitesse $\vec{v}_2$. A un instant t' la particule M1 est en A' animée d'une vitesse $\overrightarrow{v'}_1$et la particule M2 se trouve en B' avec une vitesse$\overrightarrow{v'}_2$.

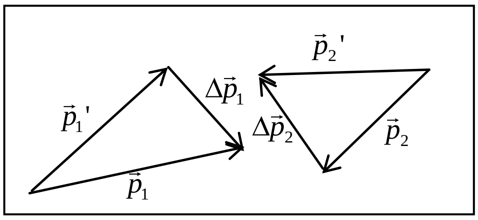
La quantité de mouvement totale du système à l'instant t est $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

A un instant t' : $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P'}_1 + \overrightarrow{P'}_2 = m_1\overrightarrow{v'}_1 + m_2\overrightarrow{v'}_2$

A tout instant : $\vec{P} = \vec{P}'$ la quantité de mouvement totale des deux particules est conservée.
D'une manière générale, nous pouvons écrire le principe de conservation de la quantité de mouvement : *la quantité de mouvement totale d'un* ***<u>système isolé</u>*** *de particules est constante.*

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n = Cte$$

Exemple :
Molécule isolée d'hydrogène : la variation de la quantité de mouvement d'un électron est égale et opposée à la somme des variations des quantités de mouvement de l'autre électron et des deux protons.
Cas de deux particules isolées.
$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = Cte \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P'}_1 + \vec{P'}_2 \Rightarrow \vec{P'}_1 - \vec{P}_1 = \vec{P'}_2 - \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$



Une interaction produit un échange de quantité de mouvement : la quantité de mouvement « *perdue* » par une particule en interaction est égale à la quantité de mouvement « *gagnée* » par l'autre particule.
Remarque :
La loi d'inertie est un cas particulier du principe de conservation de la quantité de mouvement.
$\vec{P} = Cte \Rightarrow m\vec{v} = Cte \Rightarrow \vec{v} = Cte$

IV- Deuxième et troisième loi de Newton
IV.1- Notion de force
Dans de nombreux cas nous nous observons que le mouvement d'une seule particule. Cette particule interagit avec un système d'autres particules. L'action de toutes les autres particules sur la particule en mouvement est décrit par la notion de « force » appliquée par le reste du système sur cette particule.

- Nous définissons la *force moyenne* à laquelle est soumise la particule pendant un intervalle de temps Δt par :$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$
- Nous appelons *force instantanée* appliquée à la particule la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement :$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

La force est une notion mathématique : les mots appliquée ou agissant sur ne signifient nullement que quelque chose est réellement appliqué sur la particule.
On distingue les forces suivantes :

- Force d'interaction à distance comme les forces de gravitation, les forces électromagnétique, les forces nucléaires de cohésion.
- Forces de contact comme les forces de frottement et de tension.

IV.2- Deuxième loi de Newton
Si la masse est une constante : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$
Lorsqu'un particule de masse m constante possède une accélération $\vec{a}$, nous dirons qu'elle est soumise à une force $\vec{F} = m\vec{a}$

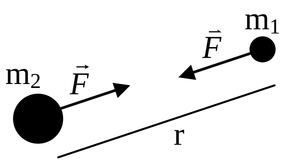
IV.3- Troisième loi de Newton
Le principe de la conservation de la quantité de mouvement pouvait s'écrire pendant un intervalle de temps Δt : $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$
Il en résulte que : $\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}$ Ou bien : $\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt}$ et donc : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
La force appliquée par la particule 2 sur la particule 1 est égale et opposée à la force appliquée par la particule 1 sur la particule 2 : c'est la principe de l'action et de la réaction.

- Si la particule 1 est en interaction avec d'autres particules d'un système isolé comportant n particules :
$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -(\frac{d\vec{P}_2}{dt} + \frac{d\vec{P}_3}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{P}_n}{dt})$

V- Application des lois de Newton
V.1- Loi de gravitation universelle
Entre deux particules matérielles de masses m_1 et m_2 placées à une distance r l'une de l'autre, s'exerce une force attractive :
$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ $avec$ $G = 6.67.10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Exemple 1 : loi de Kepler

$$\boldsymbol{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}}$$



T_1 et T_2 sont les périodes de révolution des planètes de masses m_1 et m_2 respectivement.
r_1 et r_2 sont les rayons des orbites (supposées circulaires) des deux planètes.
L'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme est donnée par :
$\boldsymbol{a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}}$ et par conséquent la force $\boldsymbol{F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}}$
Selon la loi de gravitation universelle et en considérant l'interaction de chacune des planètes avec le soleil on peut écrire : $\boldsymbol{G\frac{m_s m_1}{r_1^2} = m_1\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}}$ **et** $\boldsymbol{G\frac{m_s m_2}{r_2^2} = m_2\frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}}$
En divisant ces deux dernières égalités l'une sur l'autre on a : $\boldsymbol{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}}$

Exemple 2 : satellite géostationnaire

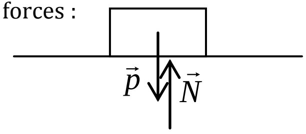
On considère un référentiel attaché au centre de la terre mais ne tournant pas avec elle (référentiel d'inertie). Un satellite géostationnaire (de masse m) décrit une orbite circulaire de rayon r et doit effectuer une rotation en 24 heures.
La force qui le maintient sur son orbite est son poids : $P = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_T m}}{\boldsymbol{r^2}}$

La force centripète à laquelle est soumis le satellite est : $P = ma = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$ $avec\ \omega = 2\pi/T$.

$$\boldsymbol{P = F \Leftrightarrow G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow r = \left(\frac{G m_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$

Le satellite doit être placé sur une orbite de rayon $\boldsymbol{r} = \left(\frac{\boldsymbol{G m_T T^2}}{\boldsymbol{4\pi^2}}\right)^{\boldsymbol{1/3}}$ et lancé avec une vitesse initiale de $\boldsymbol{v} = \left(\frac{\boldsymbol{G m_T}}{\boldsymbol{r}}\right)^{\boldsymbol{1/2}}$

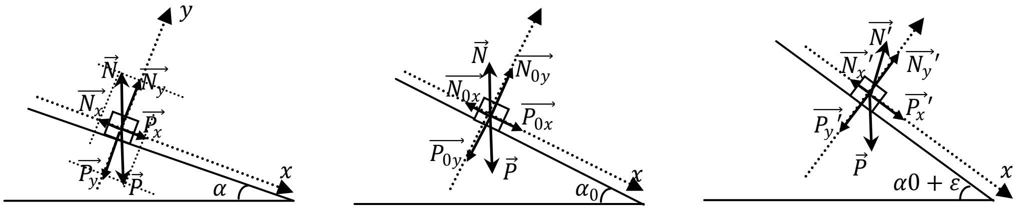
V.2- Force de contact
Forces qui s'exercent entre deux corps en contact l'un avec l'autre.
Exemple 1
Une brique en équilibre sur un sol horizontal. L'accélération $\vec{a} = \vec{0}$. La brique est soumise aux deux forces :



- Son poids : **<u>force à distance</u>** que les molécules de la terre appliquent sur la brique.
- $\vec{N}$: force globale que les **<u>molécules du sol en contact</u>** avec la brique appliquent sur celle-ci.

Remarque :
$\vec{N}$ Représente la réaction du sol. Le principe de l'action et de la réaction s'écrit $\overrightarrow{N'} = -\vec{N}$
$\overrightarrow{N'}$ Force de **contact** que les molécules de la brique en contact avec le sol exercent sur celui-ci.
<u>L'action n'est pas le poids de la brique.</u> Le principe de l'action et de la réaction ne s'applique qu'entre deux forces de <u>même nature physique</u>.
A $\vec{N} \rightarrow \overrightarrow{N'}$ et à $\vec{P} \rightarrow \overrightarrow{P'}$
$\vec{P}$: force que toutes les molécules de la terre appliquent sur toutes les molécules de la brique.
$\overrightarrow{P'}$: force que toutes les molécules de la brique appliquent sur celles de la terre.

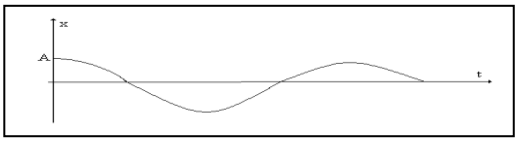
V.3- Les frottements :



Pour toutes une série de valeurs de α inférieur à une certaine valeur limite α_0 qui correspond au début du glissement, la brique reste immobile. On peut écrire alors : $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$.
En faisant les projections : $\vec{P} = P_x\vec{\imath} + P_y\vec{\jmath}$ avec $P_x = mgsin\alpha$ et $P_y = mgcos\alpha$
De la même façon : $\vec{N} = N_x\vec{\imath} + N_y\vec{\jmath}$
Lorsque α augmente la composante P_x augmente (car $sin\alpha$ augmente). La nature des surfaces en contact permet à la force de liaison $\vec{N}$ de « s'adapter » de façon à maintenir l'équilibre.
Le coefficient de frottement statique par $\mu_S = \frac{\|\overrightarrow{N_{0x}}\|}{\|\overrightarrow{N_{0y}}\|} = \tan\alpha_0$. α_0 est appelé angle de frottement. La force de frottement statique maximale est $\vec{f}_{smax} = \mu_S\overrightarrow{N_{0y}} = \mu_S mgcos\alpha_0$
En faisant croître α d'une très petite quantité au-delà de α_0, la brique se met à glisser. Son mouvement est uniformément accéléré. Nous avons à <u>l'équilibre limite</u> $N_{0x} = mgsin\alpha_0$ et en cas du mouvement $-N'_x + mgsin\alpha_0 = ma > 0$
Alors on peut déduire que $N_{0x} > N'_x$
Le rapport $\frac{\|\overrightarrow{N_x'}\|}{\|\overrightarrow{N_y'}\|}$ est pratiquement constant au cours du mouvement il représente le coefficient de glissement cinétique (dynamique) $\mu_C = \frac{\|\overrightarrow{N_x'}\|}{\|\overrightarrow{N_y'}\|}$.La force de frottement cinétique est $\vec{f_c} = \mu_c\overrightarrow{N_y'} = \mu_c mgcos\alpha$

V.3.1- Résistance de l'air
Si un objet est en chute libre dans l'air, au bout d'un certain temps, sa vitesse devient constante et à son poids s'oppose une force appelée *résistance de l'air* $\vec{f} = -k\vec{v}$ avec k une constante déterminée expérimentalement.

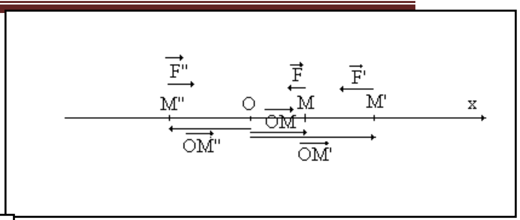
V.4- Force élastique
L'un des plus importants mouvements oscillatoires est le mouvement oscillatoire sinusoïdal dans la mesure où il représente beaucoup de phénomènes réels oscillatoires.
$x = Acos\omega t$ $(\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath})$; $\vec{v} = -\omega Asin\omega t\vec{\imath}$ et $\vec{a} = -\omega^2 Acos\omega t\vec{\imath} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$



La relation fondamentale de la dynamique donne $\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM}$

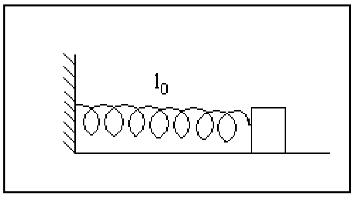
Soit en projection : $F_x = -kx$

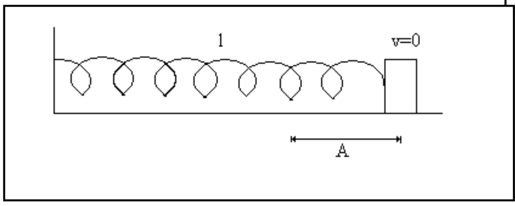
Dans un mouvement sinusoidal, la force est Proportionnelle au déplacement $\vec{r}$ mesurée par rapport à l'origine et lui est opposée ; elle est toujours dirigée vers l'origine O et ne s'annule que pour cette position.

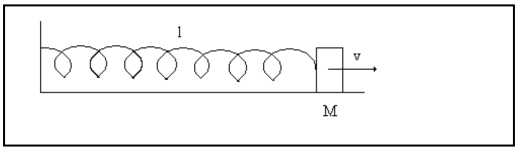


Exemple

a) déformation d'un ressort







le ressort applique sur le disque une force $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$ soit $F_x = -kx$ avec $x = l - l_0$

La plupart des ressorts, dans des conditions normales d'utilisation (déformation raisonnable) se comportent de cette manière. K est appelé constante de raideur du ressort et pourrait être déterminé expérimentalement $k = m\omega^2 = m(\frac{2\pi}{T})^2$

V.5- Force d'inertie (pseudo-force)

Nous avons défini dans un référentiel d'inertie la force ($\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$). La force telle que l'a définie Newton est d'origine matérielle (la force de gravitation, force de frottement, force élastique). Comme l'accélération est une notion relative : un observateur qui se trouve dans un référentiel accéléré par rapport à celui d'inertie mesure une accélération $a_r \neq a_a$.

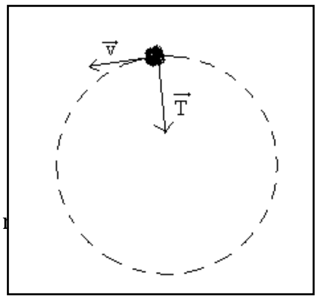
Par conséquent cet observateur ne pourra pas écrire la relation fondamentale de la dynamique : $\sum\vec{F} = m\vec{a}_r$ et attribuer une origine matérielle aux forces.

Exemple 1 : *objet dans un satellite*

Pour un observateur terrestre : l'objet tourne et il a donc une accélération (centripète) $\vec{a}$. Le poids : $P = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_T m}}{\boldsymbol{r^2}}$ avec m et m_T sont les masses de l'objet et de la Terre respectivement. Pour un observateur qui se trouve dans le satellite (cosmonaute) : l'objet est immobile car tous les deux ont le même mouvement et $a_r = 0$ et donc $ma_r = 0$. S'il sait que l'objet a un certain poids P il doit ajouter une force $\vec{f} = -\vec{P}$ pour que $m\vec{a}_r = \vec{0}$ soit vérifiée : $m\vec{a}_r = \vec{0} = \vec{f} + \vec{P}$. $\vec{f}$ a le même module que le poids. Le cosmonaute appelle cette force centrifuge.

Exemple 2 : ***pierre tournant autour d'une ficelle***

$\vec{T}$ tension du fil (force centripète). Pour un observateur au sol : $\vec{T} = m\vec{a}_N = m\frac{v^2}{r}\vec{u}$



Pour un observateur lié à la pierre : $m\vec{a}_r = \vec{0} = \vec{f} + \vec{T}$

$\vec{f}$: force centrifuge imaginaire : $\vec{T} = -m\vec{a}_r$

Cette force n'existe que pour l'observateur lié à la pierre ous l'appelons <u>force d'inertie</u> et n'a aucune origine matérielle. Elle n'est la cause d'aucun mouvement.

Elle permet seulement à un observateur non Galiléen d'écrire une relation analogue à la dynamique.

Généralisation

Un observateur d'inertie écrit : $\sum\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$

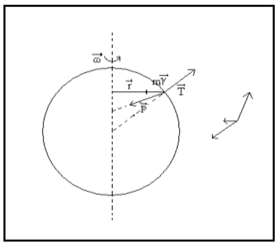
Un observateur accéléré par rapport à lui mesure une accélération $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$ et il peut écrire :

$m\vec{a}_r = \sum\vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$ et donc $m\vec{a}_r = \sum\vec{F} + \sum\vec{f}$. En faisant intervenir les forces d'inertie : $\sum\vec{f} = -m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$

Remarque

Un observateur en translation uniforme par rapport au repère d'inertie n'a pas besoin d'introduire la force d'inertie pour écrire la relation fondamentale de la dynamique.

Variation de la verticale à la surface de la terre



$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{T}$ si la Terre ne tourne pas

$\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont respectivement le poids et la tension du fil à plomb.

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ avec $ma = m\omega^2 r$ Terre en rotation

Pour un observateur terrestre le fil à plomb est en Equilibre :

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = \vec{0}$ *avec* $\vec{f} = -m\vec{a}$ *est la force d'inertie* (centrifuge)

La direction du fil est déterminée par la relation $\vec{T} = -(\vec{P} + \vec{f})$

Pendule dans un véhicule (voir figure ci-contre)

Pour un observateur lié au sol $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Pour un observateur dans le véhicule

$\vec{P} + \vec{T} - \vec{f} = \vec{0}$