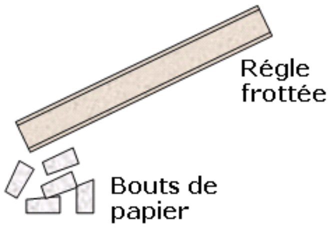
CHAPITRE 1

Charge électrique et Loi de Coulomb

I. Généralités:

a) **Phénomènes électrostatiques**: Les phénomènes électrostatiques sont des phénomènes naturels que l'homme rencontre dans sa vie quotidienne comme l'attraction de petits objets en papier par des corps frottés, l'écartement d'un filet d'eau par un peigne après avoir peigner les cheveux ...etc. Thalès fût le premier à constater (600 ans avant J.C.) qu'une baguette d'ambre frottée attire des morceaux de paille.



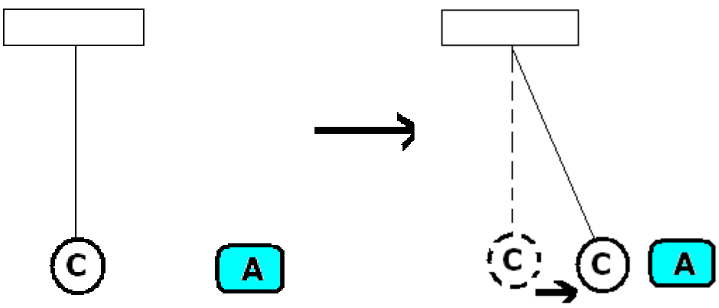
Le mot " électricité" vient du grec "eleckron" qui signifie "ambre". L'électrostatique est l'étude de l'électricité à l'état statique.

b) **Processus d'électrisation**: L'électricité statique est obtenue par frottement ou par contact.

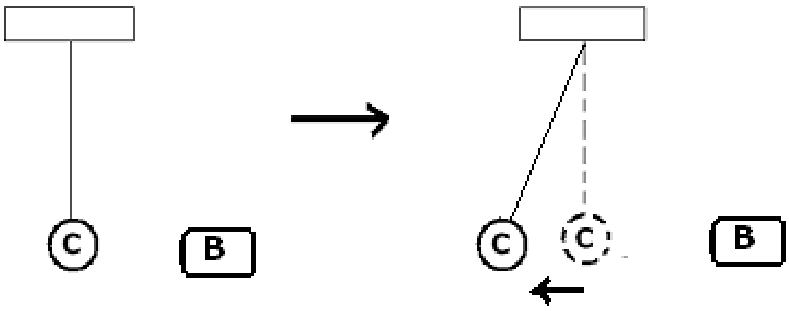
b.1) Electrisation par frottement: Soient les corps suivants:

Verre frotté avec de la soie (A) Ambre frotté avec de la fourrure (B) Boule de liège (C)

On réalise les expériences suivantes:



Entre les corps C et A se produit un phénomène d'attraction



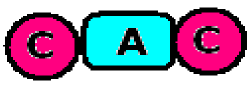
Entre les corps C et B se produit un phénomène de répulsion

Ces deux phénomènes sont des processus **d'électrisation par frottement**.

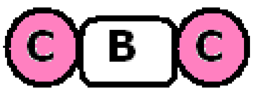
Dans la nature, il y a 2 types d'électricité : *une **électricité négative** (ambre) et une **électricité positive** (verre). On aurait pu les appeler " verte" et "rouge".*

b.2) Electrisation par contact:

Soient les corps suivants:

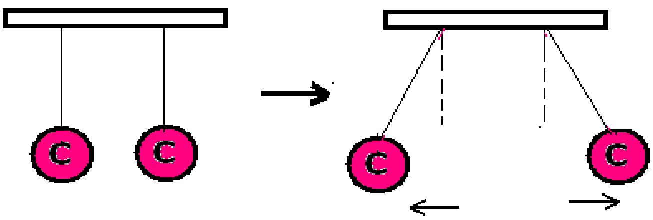


Deux (2) boules de liège ayant subi un contact avec A (déjà frotté avec de la soie) et



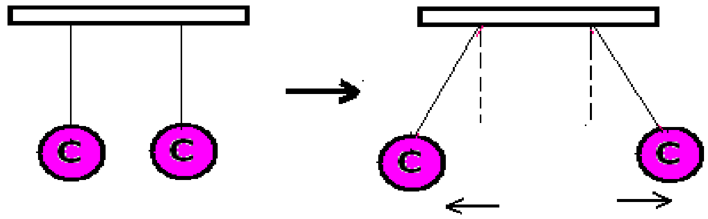
deux autres boules de liège ayant subi un contact avec B (déjà frotté avec de la fourrure)

On réalise les expériences suivantes:.



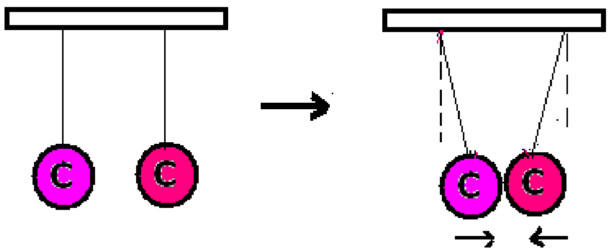
Répulsion

Les deux boules C mises en contact avec le **corps A**



Répulsion

Les deux boules C sont celles mises en contact avec le **corps B**



Attraction

Une boule C mise en contact avec A et l'autre boule C avec B

Ces deux phénomènes sont des processus d'électrisation par contact.

On constate d'après ces expériences que : ***Deux charges de même nature (même signe) se repoussent et deux charges de nature différentes s'attirent***.

c) Origine d'électrisation

Les processus d'électrisation s'expliquent par le transfert de charges élémentaires (électrons).

Dans le cas du frottement:

Verre + soie: les électrons passent du verre vers la soie, donc le verre est chargé positivement et la soie négativement.

Ambre + fourrure : les électrons passent de la fourrure vers l'ambre, donc la fourrure est chargée positivement et l'ambre négativement.

Série triboélectrique: C'est une série de matériaux naturels ou synthétiques obtenue expérimentalement:

……….- verre – mica – laine - poil de chat – bois – ambre – résine – souffre - …….

Si on frotte le corps "**n**" dans la série avec le corps "**n+1**" ou plus, le corps "**n**" se charge positivement et le corps "**n+1**" se charge négativement.

Dans le cas d'électrisation par contact:
Si on met en contact une boule de liège avec du verre préalablement frotté avec de la soie, les électrons vont passer de la boule vers le verre, de sorte que, après le contact, le verre deviendra neutre.

d) Charges électriques: Du point de vue électrique, dans la nature, il existe 3 types de corps:

- Corps électriquement neutre: le nombre de charges positives est égal au nombre de charges négatives.
- Corps électriquement positif: le nombre de charges positives est supérieur au nombre de charges négatives.
- Corps électriquement négatif: le nombre de charges positives est inférieur au nombre de charges négatives.

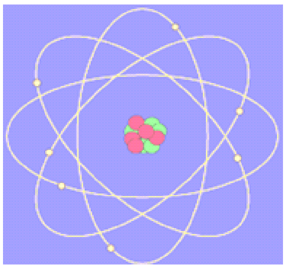
e) Structure de la matière:

La matière est constituée d'atomes, d'ions et de molécules. Chaque atome est composé d'un noyau autour duquel gravitent des électrons. Electriquement, l'atome est neutre.

L'électron (découvert en 1909 par **Millikan**) est la charge élémentaire négative et vaut $e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C (Coulombs).

Le noyau (découvert en 1911 par **Rutherford**) est constitué de particules chargées positivement (protons) et de particules électriquement neutres (neutrons). Ces derniers ont été découverts par **Chadwick** en 1932.

Les protons et les neutrons sont appelés "nucléons".



Atome $^{A}_{Z}\mathbf{X}$

Z= nombre d'électrons

A= nombre de nucléons

N= A-Z = nombre de neutrons

Dans la nature il y a des molécules simples (composées de mêmes atomes comme H_2) et des molécules composées (constituées d'atomes différents : H_2O).

Particule	Charge	Masse
Electron	$-1{,}6\ 10^{-19}$ C	$9{,}1\ 10^{-31}$ kg
Proton	$+1{,}6\ 10^{-19}$ C	$1{,}67\ \ 10^{-27}$ kg
Neutron	0 C	$1{,}67\ \ 10^{-27}$ kg

N.B: La masse du proton est 1850 fois plus grande que celle de l'électron.

Les baryons sont les protons et les neutrons. Chaque baryon est constitué de 3 quarks.
Il existe 2 types de quarks: les quarks up ou quarks *U* de charge **+2e/3** et les quarks down ou quark *d* de charge **-e/3**.

- Un proton est constitué de 2 quarks *U* et d'un quark *d*, ce qui donne une charge de proton égale à : $2e/3 + 2e/3 - e/3 = e$
- Un neutron est constitué de 2 quarks *d* et d'un quark *U*, ce qui donne une charge de neutron égale à : $2e/3 - e/3 - e/3 = 0$

f) Conservation et quantification de la charge électrique

Les charges électriques élémentaires étant permanentes, si un corps chargé est isolé, c'est-à-dire s'il ne peut pas échanger de charges avec l'extérieur, sa charge électrique reste constante. Ceci constitue la loi de conservation de la charge.
Millikan a montré que toute charge électrique est quantifiée : n'existe que sous forme de multiples d'une charge élémentaire *e*.
Exemple : Calculer la charge électrique contenue dans 1mm^3 de cuivre.
Données : nombre d'Avogadro $N_A = 6.02.10^{23}\ mol^{-1}$, masse volumique du cuivre 8.9.103 kg/m^3.
Z=29

g) Les forces de la nature :

Dans la nature il y a 4 types de forces dont deux sont d'origine électriques:

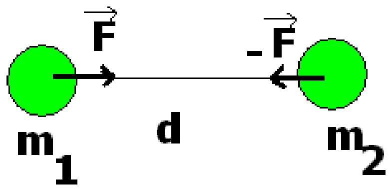
- ✓ **Forces nucléaires faibles**: assurent la cohésion des baryons (quark-quark)
- ✓ **Forces nucléaires fortes**: assurent la cohésion du noyau (proton-neutron)
- ✓ **Forces électromagnétiques** : assurent la cohésion de l'atome (noyau-électrons-quark)
- ✓ **Forces gravitationnelles**: assurent la cohésion à grande échelle de l'Univers.

II. Forces électriques: loi de Coulomb

Rappels sur la loi de gravitation universelle:

Deux corps de masse m_1 et m_2, distants de *d*, **s'attirent** mutuellement par une force radiale dont le module est :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$



Où G est la constante de gravitation universelle = 6.67 10^{-11} SI (N.m^2/kg^2)

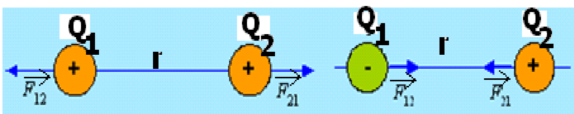
Si, par exemple, M est la masse de la Terre (M= 6 10^{24} kg) et R son rayon (R=6400 km), la force gravitationnelle est : $F = G\frac{m_1 M}{R^2} = m_1 g$

Sur la surface de la Terre, F représente le poids du corps de masse m_1.

Force électrique:

Deux charges électrique Q_1 et Q_2, distantes de *r*, s'attirent ou se repoussent mutuellement par une force F tel que:

- ✓ F est radiale (dirigée suivant la droite joignant les 2 charges)
- ✓ Proportionnelle à Q_1



- ✓ Proportionnelle à Q_2
- ✓ Inversement proportionnelle à r^2

Donc le module de cette force est: $F = k\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$

Avec : $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\,10^9\, N.m^2.C^{-2}$

Où ε_0 est la permittivité du vide (elle se mesure en farads par couloumb (F/C))
Cette formule est valable dans le vide pour des charges sphériques et immobiles.

N.B: Dans un milieu matériel (autre que le vide), on a : $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$ avec $\epsilon = \varepsilon_r \epsilon_0$ où ϵ_r est la permittivité relative du milieu et ϵ_0 celle du vide ($\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi c^2} \approx 8.85\,10^{-12} SI$).

Exemples :

Exemple 1:

Soient 2 électrons dans le vide et distants de *r*. Comparez les forces gravitationnelle et électrique qui s'exercent sur ces 2 particules.

$On\ a:\ \ m = 9{,}1\ 10^{-31}\ kg\ et\ Q = 1{,}6\ 10^{-19}\ C$

La force électrique est répulsive et vaut: $F_e = k\dfrac{Q^2}{r^2}$

La force gravitationnelle est attractive et vaut: $F_g = G\dfrac{m^2}{r^2}$

Si on compare ces 2 forces on trouve: $\dfrac{F_e}{F_g} = \dfrac{kQ^2}{Gm^2} = \dfrac{(9\ 10^9)(1{,}6\ 10^{-19})^2}{(6{,}67\ 10^{-11})(9{,}1\ 10^{-31})^2} = 4{,}17\ \ 10^{42}$

Donc la force d'origine électrique est très importante devant la force gravitationnelle.

Note:

- ✓ La force électrostatique est nettement plus grande que le poids des bouts de papier attirés par la règle frottée.
- ✓ Il n'y a pas de collisions entre les corps célestes car ils sont électriquement neutres.

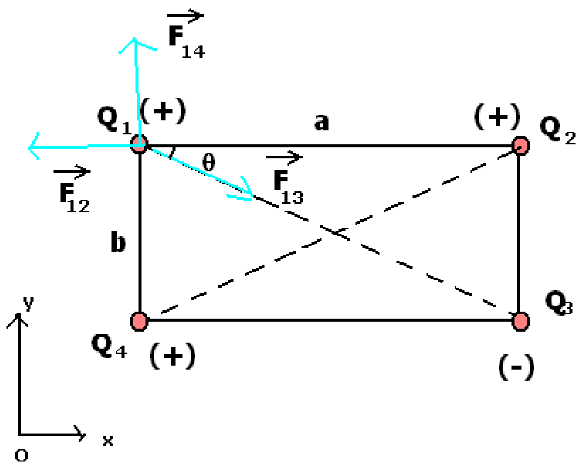
Exemple 2:

Soient 4 charges ponctuelles se trouvant aux sommets d'un rectangle de longueur *a* = 4 m et de largeur b = 3 m. Q_1 = 1C, Q_2= $2Q_1$, Q_3=- $3Q_1$ et Q_4=$4Q_1$

Trouvez la direction et la grandeur de la force exercée sur la charge Q_1 par les 3 charges;

Pour résoudre les exercices de ce type, on doit suivre les étapes suivantes:

- On mentionne d'abord le signe de chaque charge.
- On trace les vecteurs forces en respectant la loi de Couloumb.
- On calcule le module de chaque force.
- On choisit un repère (xOy).
- On calcule les projections de cette force (force résultante) sur les axes Ox et Oy.
- On calcule le module de la force résultante.



Les modules des forces :

$$F_{12} = k\,\frac{Q_1Q_2}{a^2} = \frac{9}{16}\,10^9\,N$$

$$F_{13} = k\,\frac{Q_1Q_3}{a^2+b^2} = \frac{27}{25}\,10^9\,N$$

$$F_{14} = k\,\frac{Q_1Q_4}{b^2} = 4\,10^9\ N$$

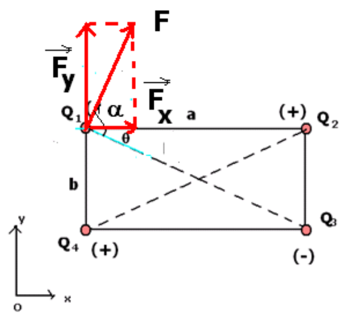
Calcul des projections:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{14}}$$

$$F_x = F_{13}\,cos\theta - F_{12} = \left(\frac{27}{25}\,\frac{4}{\sqrt{25}} - \frac{9}{16}\right)10^9\,N = 0.864\,10^9\ N$$

$$F_y = F_{14} - F_{13}\,sin\theta = \left(4 - \frac{27}{25}\,\frac{3}{5}\right)10^9\,N = 3.352\,10^9\,N$$

Calcul de la force résultante ainsi que sa direction:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10^{10}\sqrt{8.64^2 + 33.52^2} = 34.61\,10^{10}\ N$$

$$tg\,\alpha = \frac{F_x}{F_y} = 3.87$$

Donc:

$$\alpha = 75.5°$$

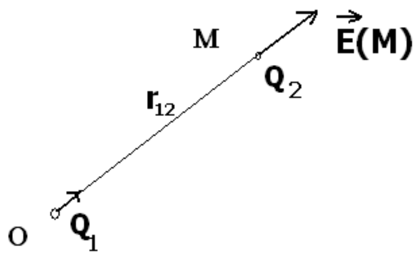
CHAPITRE II
Champ électrostatique

<u>Rappels: champ scalaire et champ vectoriel</u>

Champ de scalaires : A tout point M(x,y,z) de l'espace on lui associe une fonction scalaire F(x,y,z) comme par exemple la pression, la température …..etc. L'ensemble de ces points forment un champ de scalaires.

Champ de vecteurs: A tout point M(x,y,z) de l'espace on lui associe une fonction vectorielle comme par exemple la vitesse , la force, …etc. L'ensemble de ces points forment un champ de vecteurs.

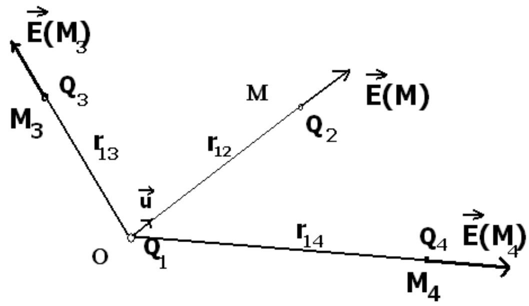
Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle:



Soient 2 charges ponctuelles Q_1 (située au point O) et Q_2 (située au point M)

Q_1 exerce sur Q_2 la force: $\overrightarrow{F_{1/2}} = k\frac{Q_1Q_2}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\,\vec{u}_{OM} = Q_2\,\vec{E}(M)$

Avec : $\vec{E}(M) = k\frac{Q_1}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\,\vec{u}_{OM}$



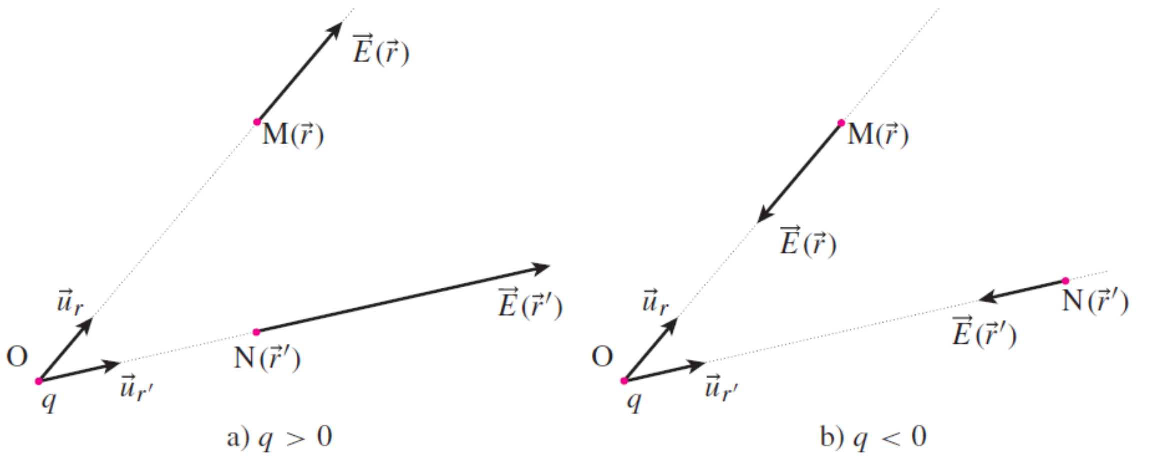
Cette même charge va créer aux points M_3 et M_4 respectivement les champs électriques $\vec{E}(M_3)$ et $\vec{E}(M_4)$.

Donc une particule de charge Q située en O crée en un point M de l'espace (distinct de O et distant de r) un champ vectoriel : $\vec{E}(M) = k\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_{OM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_{OM}$ appelé champ électrostatique

L'unité de $\vec{E}(M)$ est le N/C ou V/m.

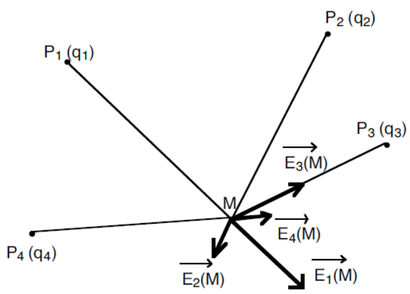
Si $Q > 0$, $\vec{F}\ et\ \vec{E}$ sont dirigés dans le même sens. **$\vec{E}$ s'éloigne des charges positives.**

Si $Q < 0$, $\vec{F}\ et\ \vec{E}$ sont dirigés dans de sens contraires. **$\vec{E}$ se rapproche des charges négatives.**



Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles:

Soient n particules de charge Qi, situées aux points Pi. Quel est le champ créé par ces charges en un point M de l'espace?



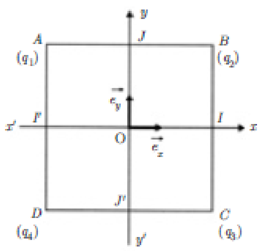
Avec $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) + \cdots + \vec{E}_n(M) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$

Avec $\vec{u}_i = \vec{u}_{p_iM}$

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est ur comme le **principe de superposition**

On peut également écrire le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\left\|\vec{OM}-\vec{OP_i}\right\|^2}\vec{u}_i \quad \vec{u}_i = \frac{\vec{OM}-\vec{OP_i}}{\left\|\vec{OM}-\vec{OP_i}\right\|}$$



Exemple :

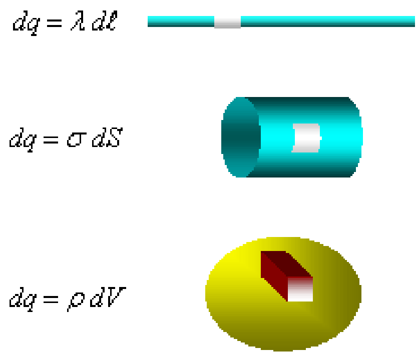
On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté

a = 1 m, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires

$\vec{e}_x$ **et** $\vec{e}_y$. On donne : $q_1 = q = 10^{-8}$ C, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$, $q_4 = -q$. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(O)$

Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges.

Différentes distributions de charges:



Dans la nature on rencontre toujours des distributions continues de charges:

- Conducteur linéaire uniformément chargé: la distribution est linéique de distribution linéique de charge $\lambda = \frac{dQ}{dl}$ en C/m.
- Conducteur uniformément chargé sur sa surface: la

distribution est surfacique de densité surfacique de charge $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ en C/cm^2.

- Conducteur uniformément chargé en volume : la distribution est volumique de densité volumique de charge $\rho = \frac{dQ}{dV}$ en C/cm^3.

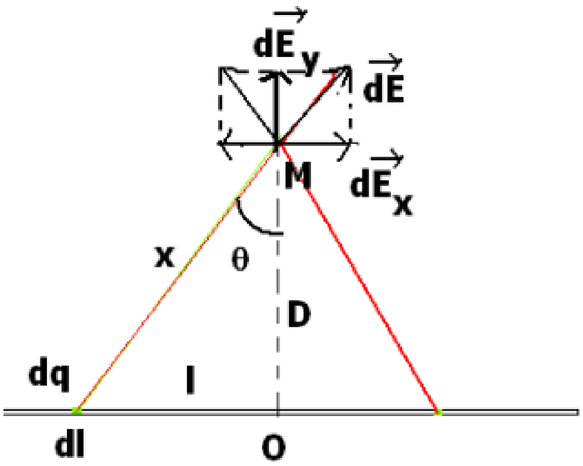
Si on a affaire à une distribution continue de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution en un point quelconque de l'espace est :

$$\vec{E}(M) = \oint_{distribution} d\vec{E}(M)$$

$$avec \quad d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\vec{u}$$

Exemple : Calculez le champ électrostatique créé par un fil conducteur de longueur infinie et de densité linéique de charge λ en un point M situé à une distance D du fil.

La charge dq située sur la distance dl va créer au point M le champ:



$$d\vec{E} = d\vec{E_x} + d\vec{E_y}$$

Le champ total est:

$$\vec{E} = \sum d\vec{E} = \sum d\vec{E_x} + \sum d\vec{E_y}$$

Pour raison de symétrie on a:

$$\sum d\vec{E_x} = 0$$

Le champ résultant est donc dirigé suivant (Oy) et vaut:

$$E = \sum dE_y = \int dE_y$$

Comme $\quad dE_y = dE\ cos\theta \quad$, on obtient:

$$E = \int \frac{kdQ\ \cos\theta}{x^2} = \int \frac{k\lambda dl}{x^2}cos\theta$$

D'autre part: $x = \frac{D}{cos\theta}$ $et \ \ l = Dtg\theta$

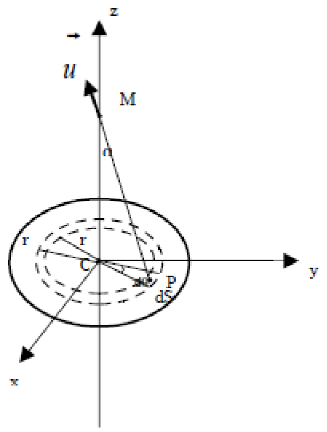
Donc :$dl = \frac{D}{cos^2\theta}\ d\theta$

Pour décrire tout le fil (de $-\infty$ à $+\infty$) on doit varier θ de$-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$.

Finalement:

$$E = \int \frac{k\lambda dl}{x^2}cos\theta = \int \frac{k\lambda}{\left(\frac{D}{cos^2\theta}\right)}\left(\frac{Dd\theta}{cos^2\theta}\right)cos\theta = \frac{k\lambda}{D}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos\theta\ d\theta = \frac{2k\lambda}{D}$$

Exemple : Calculez le champ électrostatique créé par un disque conducteur de rayon R et de densité surfacique de charge σ en un point M situé sur son axe à une distance z. En déduire le champ crée par un plan infini uniformément chargé à distance z.



Un élément de surface dS centré en P créé en M un champ

$\boldsymbol{d\vec{E}} = \frac{\boldsymbol{kdq}}{\|\boldsymbol{\overrightarrow{PM}}\|^2}\boldsymbol{\vec{u}}$. par raisons de symétrie**,** la seule composante non nulle de ce champ est dE_z. $dq = \sigma dS = \sigma\rho d\rho d\theta$

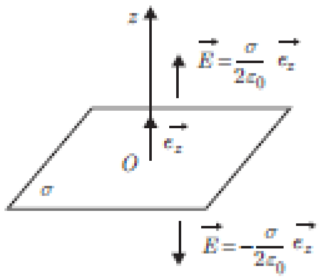
$$dE_z = dE\, cos\alpha = \frac{k\sigma r dr d\theta}{r^2+z^2 r}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$E_z = k\sigma z\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

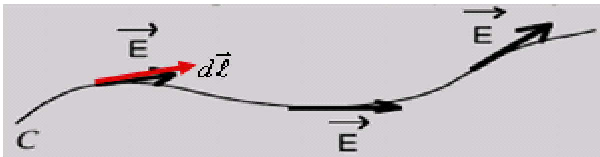
$E_z = 2\pi k\sigma z.\frac{1}{2}\int_0^R (r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} d(r^2+z^2)$

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}})\overrightarrow{e_z}$

Pour un plan infini $R \to \infty$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z}$



Lignes de champ ou lignes de force : La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace . En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point.



Pour tracer convenablement les lignes de champ certaines règles s'appliquent:

1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.
2. Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge –3Q produit 3 fois plus de lignes qu'en absorbe une charge +Q).
3. Les lignes de champ ne se croisent pas.

Considérons un déplacement élémentaire dl le long d'une ligne de champ électrostatique C. Le fait que le champ $\vec{E}$soit en tout point de C parallèle à dl s'écrit : $\vec{E}\wedge d\vec{l} = \vec{0}$.

En coordonnées cartésiennes, $d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

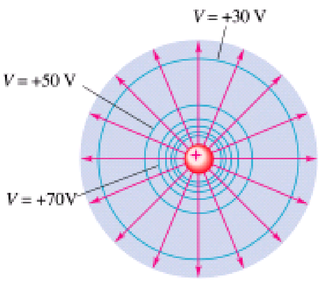
En coordonnées cylindriques

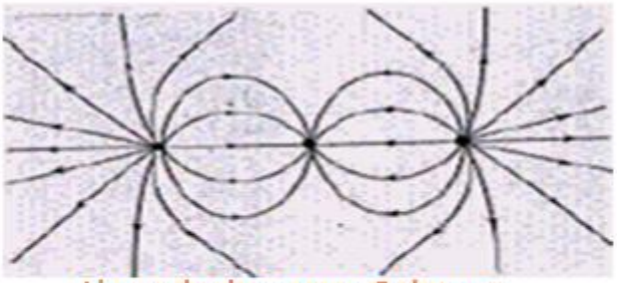
$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{rsin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

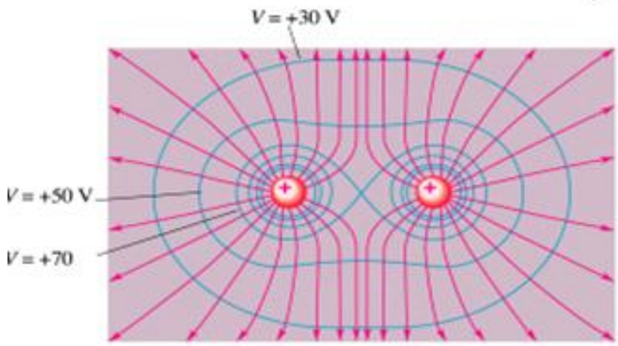
Surfaces équipotentielles: Les surfaces équipotentielles sont des espaces où le potentiel est constant. Ces surfaces sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ.

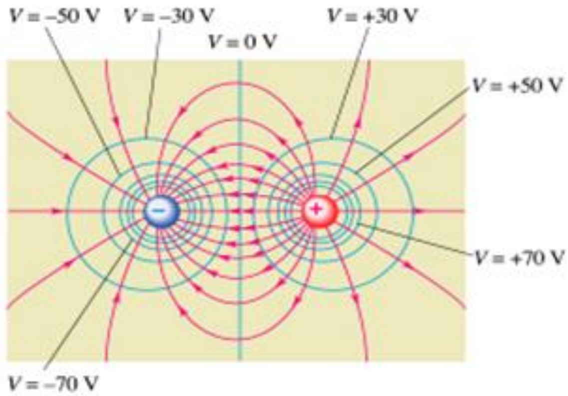




Lignes de champ pour 3 charges

Lignes de champ et les surfaces équipotentielles dans un dipôle:



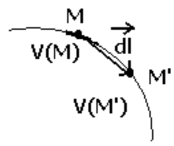


CHAPITRE III
Potentiel électrostatique

Pour faire un calcul rapide du champ électrostatique, on remplace le champ de vecteurs par un champ de scalaires car il est plus facile de travailler avec des scalaires qu'avec des vecteurs.

On définit :

- Au point M(x,y,z) on définit un scalaire $V(M)$
- Au point M'(x',y',z') on définit un autre scalaire $V(M')$



La différence entre ces 2 scalaires s'écrit:

$$dV(M) = V^{'}(M) - V(M) = \frac{dV}{dl}.dl = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}$$

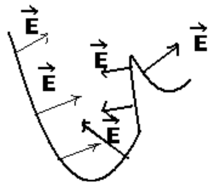
$$dV(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}$$

Cette expression est obtenue par analogie à la loi de gravitation universelle:

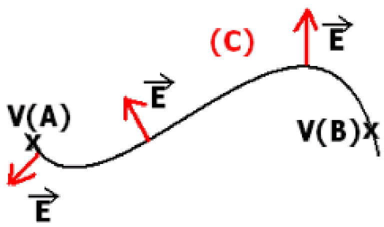
- Force gravitationnelle : $\vec{F} = G\frac{mM}{r^2}\,\vec{u} \Longrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$ (Newton 1687)
- Force électrique : $\vec{F} = G\frac{QQ^{'}}{r^2}\,\vec{u} = Q^{'}\vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ (Poisson 1813)

Définition:

Le potentiel électrostatique est relié au champ électrostatique par la relation: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Le signe "-" est choisi par convention .Lorsque le potentiel V augmente le champ électrostatique diminue.



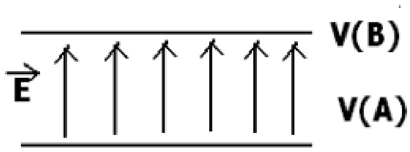
Si sur une courbe (C) on a $dV = 0$, donc le potentiel est constant sur cette courbe. Cette courbe est dite "équipotentielle" et le champ électrique est perpendiculaire à cette courbe $E \perp (C)$.



Définition: On appelle la circulation de $\vec{E}$ le long de la courbe (C) entre les points A et B, l'intégrale suivante:

$$C = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$$



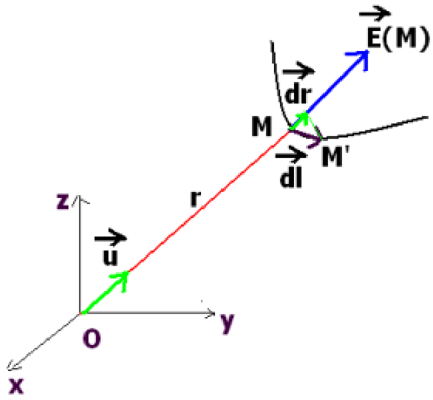
Les lignes de champ vont des régions à grands potentiels vers des régions à faibles potentiels. Dans notre cas: $\vec{E}.\overrightarrow{dl} > 0 \Longrightarrow V(A) > V(B)$

Potentiel créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle Q située au point M d'une courbe (C) et distante de r .

Soit $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$.

Le champ électrostatique créé par cette charge au point M est :



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

$$\Rightarrow dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.\overrightarrow{dl} \;\; = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + cte$$

Le potentiel à l'infini est supposé égal à une constante V_0.

Donc:

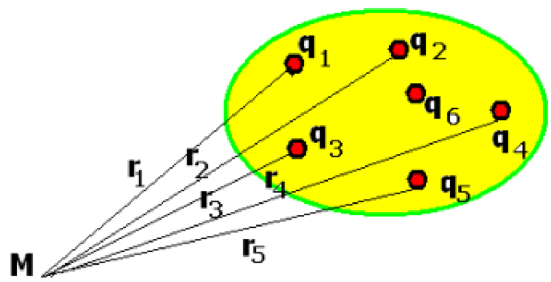
$$V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Remarques :

- $V_0 = 0 \; pour \quad r = \infty$
- V se mesure en Volts (V)
- Le potentiel mesure le degré de l'électrification de la substance. plus le potentiel est grand et plus le nombre de charges contenues dans cette substance est grand. C'est comme en thermodynamique lorsque la température augmente, la quantité de chaleur augmente.

Potentiel créé par un ensemble de charges Ponctuelles

Soient n charges ponctuelles. Le potentiel créé par ces charges au point M est :



$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M$$

Comme la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ est toujours vérifiée, on aura:

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} + V_0$$

Si la distribution est continue on aura:

$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} + V_0$$

Pour une distribution linéique de charges:

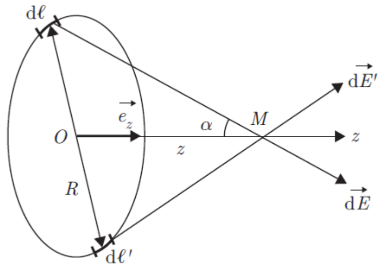
$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r} + V_0$$

Pour une distribution surfacique de charges :

$V(M) = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r} + V_0$

Pour une distribution volumique de charges :

$$V(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dV}{r} + V_0$$



Exemple : soit un fil conducteur circulaire de rayon R uniformément chargé avec une densité de charge $\lambda > 0$.

1. Donner l'expression du champ $\vec{E}(M)$
2. Donner l'expression du champ V(M) . En déduire $\vec{E}(M)$.

Solution

1. A chaque élément dl du fil, on peut faire correspondre un élément dl' symétrique par rapport à O. par raison de symétrie, la seule composante de $d\vec{E}$ non nulle est celle parallèle à $\vec{e}_z$. $\vec{E} = E_z\vec{e}_z$

$$dE_Z = dE\ cos\alpha = \frac{kdq}{z^2+R^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$E_Z = \frac{k\lambda z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{2\pi R k\lambda z}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{R\lambda z}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{R\lambda z}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

2.

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{k\lambda dl}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$V = \frac{k\lambda}{\sqrt{z^2+R^2}}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$, $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0;\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0\ ;\ E_z = -\frac{dV}{dx} = \frac{R\lambda z}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$

III. Energie électrostatique

1. Energie potentielle d'une charge ponctuelle en interaction avec un champ extérieur

L'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.

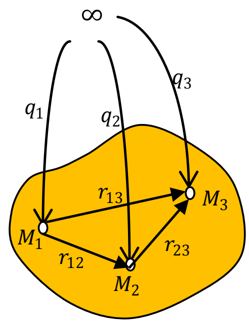
Prenons une particule de charge q placée dans un champ $\vec{E}$. Pour la déplacer de l'infini vers un point M, un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement se fait très lentement, la particule n'acquiert aucune énergie cinétique. Cela n'est possible que si, à tout instant, $\vec{F}_{ext} = -\vec{F} = -q\vec{E}$. Le travail fourni par l'opérateur sera donc :

$$W = \int_{\infty}^{M} dW = \int_{\infty}^{M} \vec{F}_{ext} . d\vec{r} = -\, q \int_{\infty}^{M} \vec{E}. d\vec{r} = q(V(M) - V(\infty))$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, et comme $dW = -dE_p$ on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M où le potentiel est $\mathbf{V(M)}$:

$$\mathbf{E_p = qV(M)}$$

2. Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles



Pour calculer cette énergie, il convient d'amener une à une les charges q_i et d'évaluer à chaque fois l'énergie nécessaire à cette opération, l'énergie étant la somme de toutes ces contributions. Considérons un système de trois charges q_1, q_2 et q_3 placées respectivement en M_1, M_2 et M_3.

On amène d'abord q_1 de l'infini en M1 : le travail $\mathbf{W_1 = 0.}$

q_1 étant placée en M1. On amène alors une charge q_2 de l'infini jusqu'en M2, c'est à dire que l'on fournit un travail $W_2 = q_2V_1(M_{1)} = \frac{kq_2q_1}{r_{12}}$. Ce travail est identique à celui qu'il aurait fallu fournir pour amener q1 de l'infini en M1 en présence de q2 déjà située en M2.

Si maintenant on amène une 3ème charge q3 de l'infini jusqu'en M3 (q1 et q2 fixes), il faut fournir un travail supplémentaire :

$$W_3 = q_3V_{1+2}(M_3) = q_3\big(V_1(M_3) + V_2(M_3)\big) = (\frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}})$$

Le travail total : $W = W_1 + W_2 + W_3 = k(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}})$

L'énergie électrostatique d'un ensemble de n charges ponctuelles est donc :

$$E_p = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

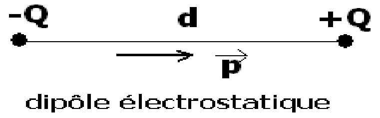
$$E_p = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{n} q_iV_i(M_i)$$

Exemple : donner l'expression de l'énergie d'un ensemble de quatre charges q1, q2, q3 et q4 placées sur les cornières d'un carré de longueur a.

IV. Dipôle électrostatique:

Définition :

Il est constitué de 2 charges égales et opposées (+Q et –Q) séparées par une distance d .Il est caractérisé par son moment dipolaire



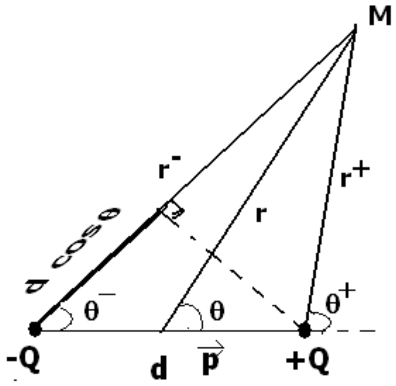
$\vec{p} = q\vec{d}$

Le moment dipolaire est une grandeur vectorielle et elle est toujours dirigée de la charge négative (-) vers la charge positive (+).

Potentiel créé par un dipôle à grande distance :

Soit un dipôle constitué de 2 charges (+Q et –Q) séparées par une distance d. On va calculer le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point M de l'espace. On a :

$V(M) = V^{+} + V^{-} = \frac{kQ}{r^{+}} - \frac{kQ}{r^{-}} = kQ\left(\frac{1}{r^{+}} - \frac{1}{r^{-}}\right) = kQ(\frac{r^{-}-r^{+}}{r^{+}r^{-}})$



Lorsque le point M est très éloigné dans l'espace, on peut faire les approximations suivantes:

$r \ggg d \Longrightarrow \theta \approx \theta^{+} \approx \theta^{-}$

$\Longrightarrow r^{-} - r^{+} = d\ cos\theta$ et $r^{-}r^{+} = r^{2}$

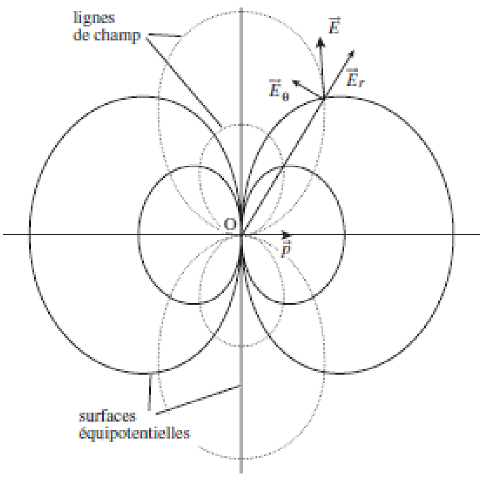
On obtient finalement:

$$V(M) = kQ\left(\frac{r^{-} - r^{+}}{r^{+}r^{-}}\right) = \frac{kQd\ cos\theta}{r^{2}} = \frac{kp\ cos\theta}{r^{2}}$$

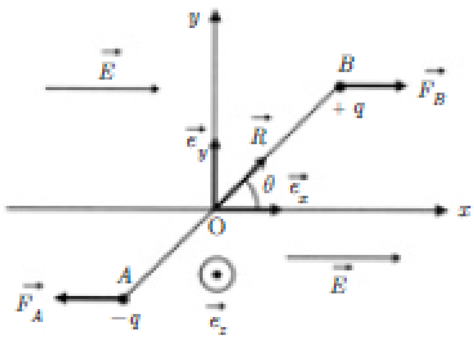
Champ créé par un dipôle à grande distance :

Pour calculer le champ électrostatique, il nous suffit maintenant d'utiliser $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$ en coordonnées cylindriques. On obtient ainsi :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2KPcos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial \theta} = \frac{KPsin\theta}{r^3} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}$$



Force et couple exercés par un champ électrique sur un dipôle



a) Cas d'un champ uniforme

$\overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = qE\overrightarrow{e_x} - qE\overrightarrow{e_x} = \vec{0}$

La force résultante est nulle, mais le moment résultant ne l'est pas, $\overrightarrow{F_A} et \overrightarrow{F_B}$

constituent un couple.

• Moment résultant :

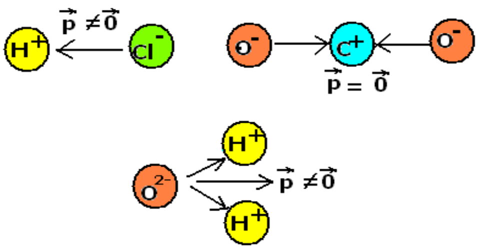
$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{a}}{2} \wedge \overrightarrow{F_B} - \frac{\vec{a}}{2} \wedge \overrightarrow{F_A} = \frac{\vec{a}}{2} \wedge q\vec{E} + \frac{\vec{a}}{2} \wedge q\vec{E} = q\vec{a} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} = -pEsin\theta\overrightarrow{e_z}$

Ce moment tend à aligner le dipôle parallèlement au champ $\vec{E}$ (θ = 0).

Atome polarisé: Généralement les atomes sont neutres car les centres de masse des charges positives (noyau) et négatives (électrons) sont confondus. Le moment dipolaire est donc nul $\vec{p} = \vec{0}$

Si un champ électrique est appliqué, il y aura un déplacement des charges et les centres de masse des charges vont se séparer. Le moment dipôlaire sera donc différent de zéro ($\vec{p} \neq \vec{0}$). L'atome est dit polarisé.

Molécule polarisée: Certaines molécules possèdent un moment dipôlaire permanent car les centres de masse des charges positives et négatives sont tout le temps différents: se sont des molécules polaires.



Exemples: HCl,CO_2,H_2O

Énergie potentielle du dipôle dans le champ $\vec{E}$:

$\boldsymbol{E_p = qV_B - qV_A = q}(-\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{e_x})$

Or le champ appliqué $\vec{E}$ est lié à $\boldsymbol{V_B - V_A}$ par

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{e_x} = -\frac{\Delta V}{\Delta x}\overrightarrow{e_x} = -\frac{\boldsymbol{V_B - V_A}}{acos\theta}\overrightarrow{e_x}$

Donc $\boldsymbol{V_B - V_A} = -acos\theta E$

Alors $\boldsymbol{E_p} = -\boldsymbol{q}\ acos\theta E = -pEcos\theta = -\vec{P}.\vec{E}$

L'énergie potentielle est minimum lorsque θ = 0, indiquant que le dipôle est en équilibre stable quand il est orienté parallèlement au champ appliqué.

****Exemple :**

Un dipôle électrostatique $\vec{P}$ est formé de deux charges électriques -q et +q placées respectivement aux points $x = -a/2$ et $x = +a/2$ d'un axe $x'Ox$

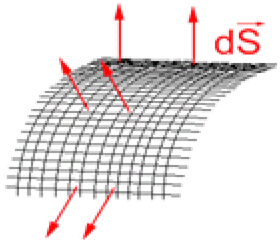
1. Déterminer et représenter le vecteur champ électrostatique aux points $M_1(r = R, \theta = 0$ $et\ M2r=R, \theta=\pi/2$. (r,θ) sont les coordonnées polaires d'un point M quelconque dans le plan xOy ($OM \gg a$).
2. On place un autre dipôle $\vec{P}'$ (parallèle à $\vec{P}$ et de même sens) au point M_1. Quelle est l'énergie potentielle électrostatique de $\vec{P}'$ en présence du champ crée par $\vec{P}$. Même question si $\vec{P}'$ est placée en M_2 .

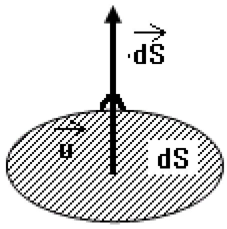
V. Théorème de Gauss

Représentation d'une surface: On représente une surface par un vecteur qui est perpendiculaire à cette surface et dont le module est égal à l'aire de cette surface.

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}$$

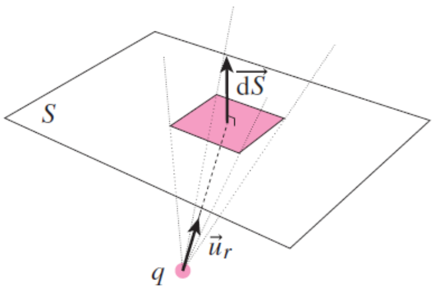
$\overrightarrow{dS}$ est toujours perpendiculaire à la surface et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à dS.





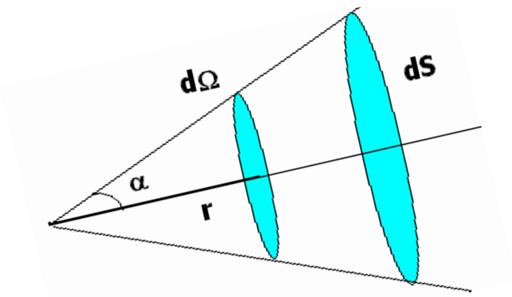
Angle solide:

Considérons un élément infinitésimal dS quelconque de la surface S, situé à la distance r de l'origine. L'ensemble des lignes de champ crées par q forment un cône s'appuyant sur le contour de dS. Ce de lignes de champ définit l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit l'élément de surface dS depuis la charge.



L'angle solide $d\Omega$est défini par la relation:$d\Omega = \overrightarrow{u_r}.\frac{d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS.cos\alpha}{r^2}$

Si $\overrightarrow{u_r}$ et $d\vec{S}$ sont dirigés dans le même sens : $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$

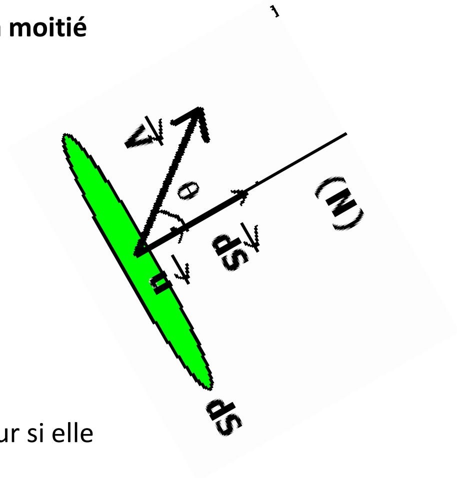


En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $dS = r^2 sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi$. Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} sin\theta d\theta$$
$$= 2\pi(1 - cos\alpha)$$

Exemple :

1. **calculer l'angle solide sous lequel on voit : le quart d'espace ; la moitié espace, tout l'espace.**
2. **Quel est l'angle solide sous lequel on voit chacune des six surfaces d'un cube à partir d'un point situé sur un sommet.**



Flux d'un vecteur:

Le flux $d\Phi$ d'un vecteur $\vec{E}$à travers une surface dS est

donné par la relation :$d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.\overrightarrow{dS}.\vec{u}$

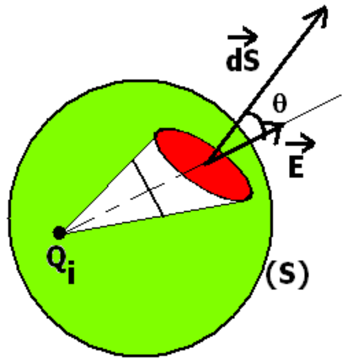
$\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface dirigé vers l'extérieur si elle est fermée.

Le flux total est : $\Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS}$

Si la surface est fermée (<u>une surface est fermée si elle renferme un volume</u>) : $\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS}$

Théorème de Gauss:

Soit une surface fermée (S) à l'intérieur de laquelle se trouve une charge Q_i. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ (qui est un vecteur) à travers la surface $\overrightarrow{dS}$ est :$d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS.cos\theta$



Or : $E = \frac{kQ_i}{r^2}$

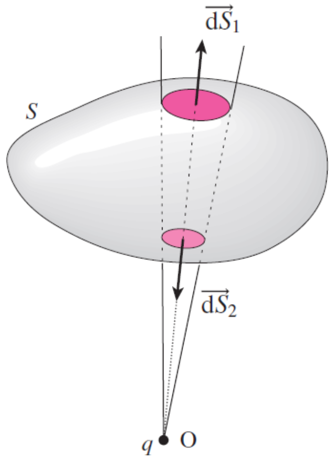
Donc: $d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{kQ_i}{r^2}.dS.cos\theta = kQ_i\, d\Omega$

$\Longrightarrow \Phi = \int \mathrm{k\,Q_i\,d\Omega} = \mathrm{kQ_i} \int \mathrm{d\Omega}$

Or : $\int d\Omega = 4\pi \ \ (pour\ tout\ l'espace),$

Donc : $\Phi = \mathrm{kQ_i} \int \mathrm{d\Omega} = \frac{\mathrm{Q_i}}{\varepsilon_0}$

Si la surface fermée S ne contienne pas la charge q > 0. Prenons tout d'abord un cône engendré par un faisceau de lignes de champ. Ce cône intersecte la surface S et définit deux surfaces élémentaires dS_1 et dS_2.



le flux à travers le tube constitue par les surfaces dS1, dS2 et la surface latérale SL engendrée par les lignes de champ. Le flux à travers la surface latérale $\vec{E}.\overrightarrow{dS_L}$est nul puisqu'en chaque point de cette surface le champ appartient à la surface.

$d\phi_1 = kq\frac{\overrightarrow{dS_1}.\overrightarrow{u_r}}{r_1^2} = kqd\Omega$

$d\phi_1 = kq\frac{d\overrightarrow{S_2}.\overrightarrow{u_r}}{r_2^2} = -kqd\Omega$

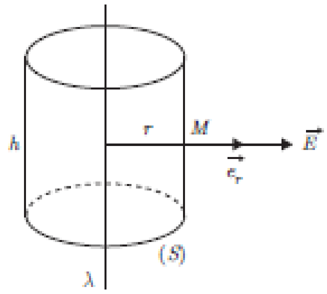
Ainsi le flux total à travers la surface entourant le volume élémentaire est nul.

Enoncé : le flux total du champ électrostatique sortant d'une surface imaginaire fermée est égal à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur divisée par ε_0 :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Ici la surface imaginaire est dite "surface de Gauss" .Elle peut être aussi une surface réelle (sphère, cylindre, cube, …) Le théorème de Gauss nous aide à calculer le champ électrostatique créé par un ensemble ou une distribution continue de charges.

Exemple : Champ créé par un fil rectiligne infini chargé d'une densité linéique



La distribution de charge est invariante par rotation autour du fil et par translation parallèle au fil : le potentiel et le champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées cylindriques θet z :

$V = V(r)$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$

Le champ électrique est donc radial.

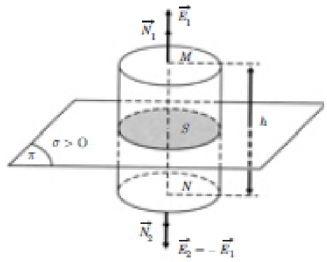
Pour calculer le champ en *M*, on peut alors choisir comme surface fermée d'intégration *(S)* un cylindre de révolution autour du fil, de rayon *r* et de hauteur *h* (surface de Gauss). Le flux sortant par les bases de *(S)* étant nul, on a :

$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{S\ lat} E.dS = E \iint_{S\ lat} dS = 2\pi rhE$

$\sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

Le théorème de Gauss s'écrit donc : $2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ alors : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

Exemple : plan infini



La distribution est invariante par translation quelconque parallèle au plan et *V* ne dépend donc que de la distance *z* au plan. Par conséquent, le champ est perpendiculaire au plan *(π)*.

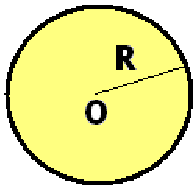
Tant que le calcul est fait en un point *M* tel que *(π)* puisse être considéré comme infini, $\vec{E}$ est uniforme de part de d'autre de π, **seul son sens change**. En effet, si l'on prend pour surface de Gauss un cylindre de hauteur *h* et de surface de base *S*, symétrique par rapport à *(π)*, on a :

$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{S\ base\ 1} E_1.dS_1 + \iint_{S\ base\ 1} E_2.dS_2 = 2E\ S$

$\sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

Alors : $E = 2\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

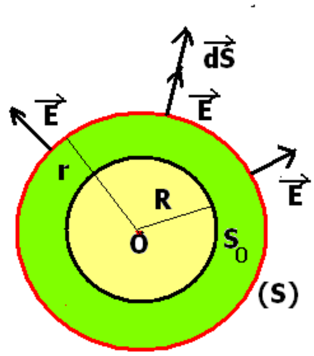
Exemple: Soit une sphère de centre O et de rayon R. Elle est uniformément chargée **en surface** (de densité surfacique de charges σ) . Calculer le champ électrostatique créé par cette sphère à l'intérieur de la sphère, sur la surface de la sphère et à l'éxterieur de la sphère.



A l'extérieur de la sphère: La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r (r>R). La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est : $Q = \int \sigma \, dS_0 = \sigma \, S_0 = 4\pi R^2 \sigma$ .Le champ électrostatique est perpendiculaire à cette sphère au point considéré.

Le flux total à travers la surface de Gauss est :

$$\Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$



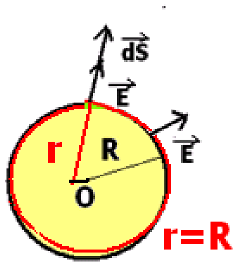
Or la surface de Gauss est : $S = 4\pi r^2$

Donc : $E = \frac{Q}{S\,\varepsilon_0} = \frac{R^2 \sigma}{\varepsilon_0 r^2}$

Sur la surface de la sphère: Ici la surface de Gauss est une sphère réelle (de centre O et de rayon R). Donc r = R.

Le flux total à travers la surface de Gauss est :

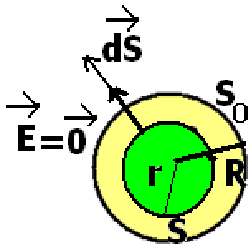
$$\Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$



Or la surface de Gauss est : $S = S_0 = 4\pi R^2$

Donc Le champ électrostatique est : $E = \frac{Q}{S_0\,\varepsilon_0} = \frac{R^2 \sigma}{\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

A l'intérieur de la sphère: La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r (r<R). Le champ électrostatique est perpendiculaire à cette sphère au point considéré. La charge à l'intérieur de cette sphère est nulle (car elle est chargée uniquement sur sa surface).



Donc le champ électrostatique est nul aussi à l'intérieur de cette sphère : $E = \frac{Q}{S\,\varepsilon_0} = 0$

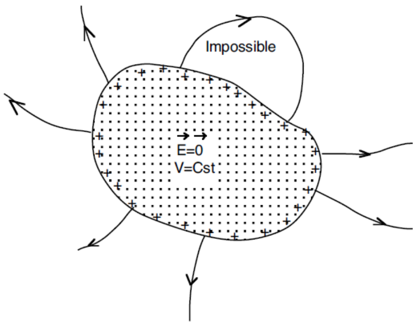
CHAPITRE IV
Conducteurs en équilibre

Définition

Les conducteurs sont des milieux dans lesquels existent des charges libres (positives ou négatives) pouvant être mises en mouvement sous l'action d'un champ électrique. L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur. La vitesse moyenne de ses électrons libres par rapport au réseau d'ions est nulle. Cette définition est associée à un comportement à l'échelle macroscopique du système d'électrons. Tout se passe comme si les électrons n'étaient soumis à aucune force macroscopique. Bien entendu, à l'échelle microscopique les électrons demeurent mobiles et entrent perpétuellement en collision.

Propriétés des conducteurs en équilibre

(a) Champ à l'intérieur (en volume)



Le champ électrostatique total à l'intérieur est nul.
Sinon la force de Coulomb est non nulle et donc déplacement de charges.

Le champ en surface est perpendiculaire à cette surface.

Comme le champ dérive d'un potentiel, cela impli
électrostatique constitue un volume équipotentiel.
La surface externe du conducteur à l'équilibre est équipotentielle.

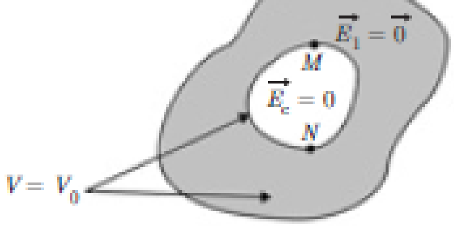
(b) Distribution des charges

Si un conducteur est chargé, où se trouvent les charges non compensées? Supposons qu'elles soient distribuées avec une distribution volumique ρ. Prenons un volume quelconque V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théorème de Gauss, on a :

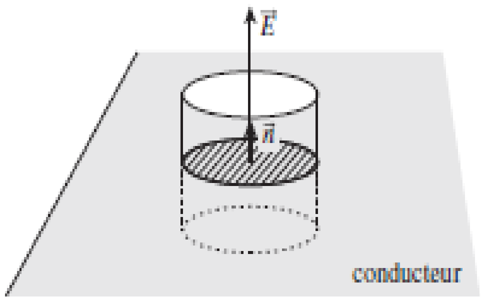
$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = 0$ car $\vec{E} = 0$

Cela signifie que ρ = 0 (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.

Pour un conducteur creux :
Le champ est nul dans la cavité
Les charges sont localisées à la surface externe du conducteur.



Intensité du champ électrique au voisinage de la surface (théorème de Coulomb)
En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur, le champ électrostatique $\vec{E}$ est normal à



S. Considérons une petite surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée Σ en y adjoignant une surface rentrant à l'intérieur du conducteur S_{int} ainsi qu'une surface latérale S_L . En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{Sext} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{Sint} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{SL} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = ESext$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\ Sext}{\varepsilon_0}$$

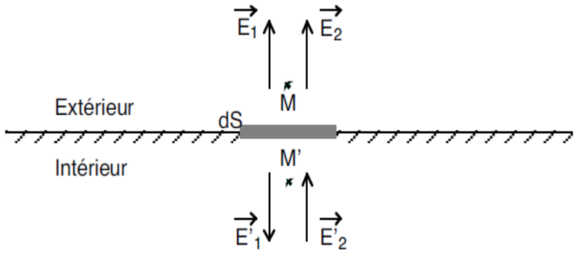
Alors :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Pression électrostatique



Soient deux points M et M' infiniment proches de la surface d'un conducteur de densité surfacique σ, M situé à l'extérieur tandis que M' est situé à l'intérieur.

Considérons maintenant une surface élémentaire dS située entre ces deux points. Soit $\overrightarrow{E_1}$le champ créé en M par les charges situées sur dS et $\overrightarrow{E_2}$ le champ créé en M par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur. Soient $\overrightarrow{E'_1}$ et $\overrightarrow{E'_2}$les champs respectifs en M'.

On a alors les trois propriétés suivantes :

$\overrightarrow{E_2}(M) = \overrightarrow{E_2}(M')$ car M et M'sont infiniment proches.

$\overrightarrow{E_2'} = -\overrightarrow{E'_1}$ car le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul.

$\overrightarrow{E_1}(M) = -\overrightarrow{E_1}(M')$ car $\overrightarrow{E_1}$ est symétrique par rapport à dS, considérée comme un plan puisque M et M' peuvent être infiniment rapprochés.

On en déduit que $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_1}$, c'est à dire que la contribution de l'ensemble du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate.

En vertu du théorème e Coulomb, le champ total $\vec{E} = \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, on en déduit que le champ créé par l'ensemble du conducteur (à l'exclusion des charges situées en dS) au voisinage du point M est :

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

La force électrostatique $d\vec{F}$ subie par cette charge dq =σ dS de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut :

$$d\vec{F} = dq\overrightarrow{E_2} = \sigma dS\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS\vec{n}$$

Quel que soit le signe de σ, la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface.

Ainsi, la pression électrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut :

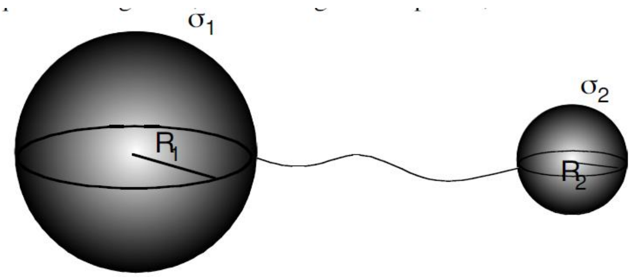
$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur

Pouvoir des pointes

L'expérience a montré qu'à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est très élevée au voisinage d'une pointe.

soit un conducteur constitué de deux sphères de rayons R1 et R2 ($R1 \gg R2$) reliées par un fils conducteur est suffisamment éloignées l'une de l'autre.



On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V. Cela implique alors :

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{KQ_1}{R_1} = \frac{KQ_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}$$

Alors : $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$

Puisque $R1 \gg R2$ alors $\sigma_2 \gg \sigma_1$

Donc, plus l'une des sphères aura un rayon petit et plus sa densité de charges sera élevée.

Exemple :

Une sphère (S1) de rayon R1=9 cm porte une charge Q1=10^{-8} C. on relie (S1) à une autre sphère métallique neutre (S2) de rayon R2= 1 cm par un fil conducteur long et fin. (S2) est suffisamment éloignée de (S1). Calculer à l'équilibre les charges Q'1 et Q'2 portées par les deux sphères.

Capacité propre d'un conducteur en équilibre

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ (la charge totale $Q = \iint_{surface} \sigma\, dS$) et porté au potentiel V.

$V(M) = K \iint_{surface} \frac{\sigma(P)dS}{PM}$

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant a, on obtient une nouvelle charge totale $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{aQ}$ et un nouveau potentiel $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{aV}$. On a ainsi un nouvel état d'équilibre électrostatique.

On peut constater que, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par Q et V) est tel que le rapport **Q/V** reste constant (cela résulte de la linéarité de Q et V en fonction de σ).

Définition

La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par

$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{V}}$

où $\boldsymbol{Q}$ *est la charge électrique* totale du conducteur porté au potentiel $\mathbf{V}$. L'unité de la capacité est le Farad (symbole F).

Remarques :

- $\mathbf{C} > 0$ **toujours**. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.
- Le Farad est une très grande unité. En général, la capacité est exprimée en nF ou pF.

Exemple :

Capacité d'un conducteur sphérique de rayon R.

$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{KQ}{R}} = \frac{R}{K} = 4\pi\varepsilon_0 R}$

Energie potentielle d'un conducteur en équilibre

Soit un conducteur en équilibre. Il est caractérisé par une capacité ***C*** , une charge ***q*** et un potentiel ***V***.

$$E_p = \int dE_p = \int_0^q V dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$E_p = \frac{1}{2} C V^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} q V$$

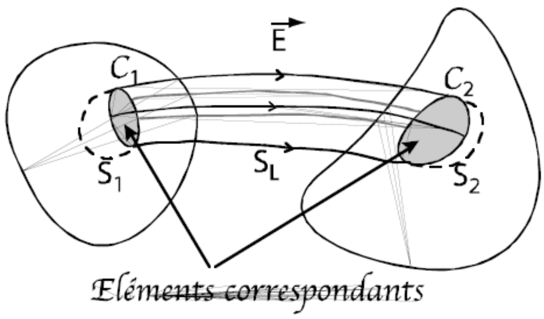
C'est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité ***C*** au potentiel ***V***.

Remarque :

Pour n conducteur en équilibre caractérisés par $\boldsymbol{q_i}$ et $\boldsymbol{V_i}$ **,** l'énergie totale est **:**

$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$

Théorème des éléments correspondants



Soit deux conducteurs (A) et (B), placés l'un à coté de l'autre et portant des densités surfaciques σ1 et σ 2 à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (A) à (B). Soit un petit contour fermé *C*1 situé sur la surface de (A1) tel que l'ensemble des lignes de champ issues de (A) et s'appuyant sur *C*1 rejoignent (B) et y dessinent un contour fermé *C*2 .

L'ensemble de ces lignes de champ constitue un tube de flux. Le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale *SL* est nul ($\vec{E} \perp d\vec{S_L}$). Soit une surface fermée produite ($S = S_{Gauss} = S_1 + S_2 + S_L$) où *S*1 est une surface qui s'appuie sur *C*1 et plonge à l'intérieur de (A1) et *S*2 une surface similaire pour (B).

$\phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} = \vec{0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$

où *Q*1 est la charge totale contenue sur la surface de (A) embrassée par *C*1 tandis que *Q*2 est la charge contenue sur la surface correspondante de (B).

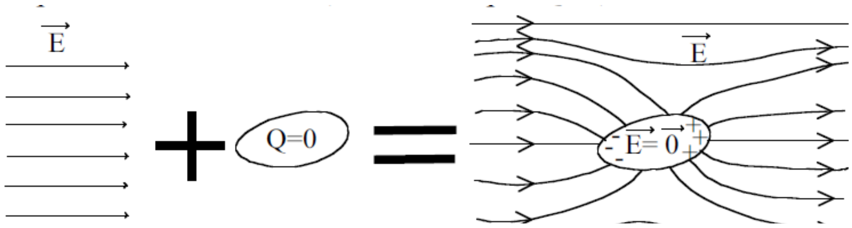
Il s'ensuit que $\boldsymbol{Q_1 = -Q_2}$

Théorème :

Les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont opposées.

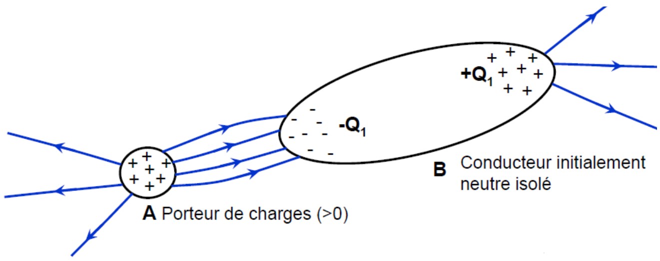
Phénomène d'influence électrostatique

Influence d'un conducteur neutre et isolé



Soit un conducteur neutre (Q=0) placé dans une région où il existe un champ uniforme $\vec{E}$.

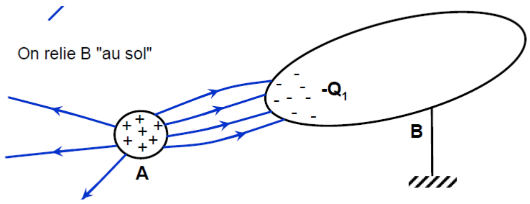
Les charges sont libres de se déplacer : déplacement de charges positives dans la direction de $\vec{E}$ et de charges négatives (électrons) dans la direction opposée. On obtient alors une **polarisation** du conducteur (création de pôles + et -), se traduisant par une distribution surfacique σ non uniforme (mais telle que Q=0).



La présence de A modifie la répartition des charge de B : Charge $-Q_1$ attirée par la charge >0 de A et Charge $+Q_1$ va du coté opposé. On dit que B est influencé par A.

L'influence est dite dans ce cas partielle, car certaines lignes de champ issues de A n'atteignent pas B.

Si B est relié au sol, le sol et le conducteur forment un seul conducteur et les charges positives sont repoussées dans le sol. Le potentiel du conducteur reste nul : aucune ligne de champ ne quitte B.



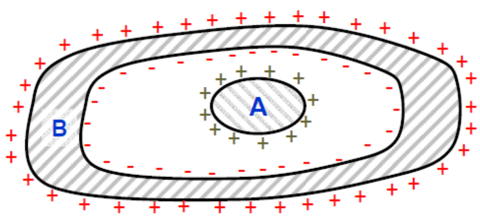
Influence totale

Considérons le cas ou le conducteur A est complètement entouré par B.

Si A et B sont initialement neutres, rien ne se passe.

- Si on apporte des charges sur B (en le mettant au potentiel V), les charges se répartissent sur la surface extérieure de B et rien n'a changé à l'intérieur. Le conducteur A est protégé de toute influence, c'est l'effet d'écran électrostatique.

- Si on apporte des charges sur A (en le reliant au potentiel V) et B reste isolé :



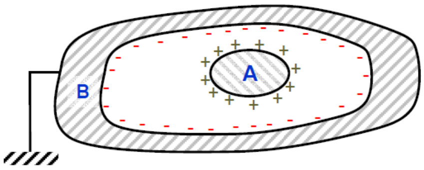
Par influence la face interne de B portera des charges négatives. Comme B est neutre, il ya aura apparition des charges positives sur sa face externe.

$\boldsymbol{Q_A = -Q_{Bint}}$ éléments correspondants

$\boldsymbol{Q_{Bext} + Q_{Bint} = 0 \Rightarrow Q_{Bext} = Q_A}$

Ce résultat ne dépend pas de la position de A à l'intérieur de B.

- **Si B est relié au sol :**



On a toujours Q_A sur A donc par influence totale :

$-Q_A = Q_{Bint}$

Mais **Q_{Bext} = 0** → les charges extérieures s'écoulent au sol.

Le champ électrique $\vec{E}_{Aint} = 0, \vec{E}_{Bint} = 0, \vec{E}_{Bext} = 0$ (à $l(extérieur\ de\ B)$ mais entre A et B , $\vec{E}_{entre\ \ A\ et\ B} \neq 0$.

Si on amène des charges sur B :

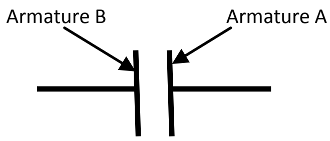
La charge intérieure de A restant la même; on a la même influence totale entre A et B → seule la charge extérieure de B change.

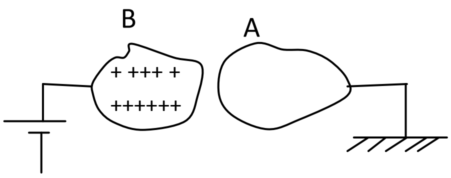
Les charges externes sont sans influence sur l'état électrique à l'intérieure de B : Ecran électrostatique.

Condensateurs

Définition

On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur. En général, les deux armatures sont séparées par un matériau isolant (un diélectrique), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur.

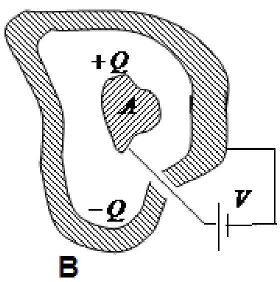




Soit un conducteur B maintenu à un potentiel V (positif) très proche d'un conducteur A relié à la terre. Le conducteur B porte une charge Q telle que Q=CV et influence A. cette influence se traduit par l'apparition sur A des charges (-) du coté proche de B. en retour A influence B et par conséquent **apparition de nouvelles charges** (+) sur B.

On peut dire qu'à l'équilibre et du fait de la présence de A, B porte plus de charges que lorsqu'il était seul. Il y a eu **condensation** de l'électricité sur B et sa capacité a augmenté.

Si V ($V=V_A-V_B$) est la ddp entre A et B, la capacité d'un condensateur est



$$C = \frac{Q}{V}$$

Elle dépend de :

- Formes des conducteurs.
- Nature des milieux qui sépare (le diélectrique) les deux armatures

Capacités de quelques condensateurs simples

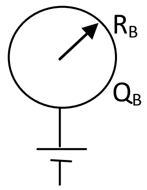
Méthode générale

- Calcul du champ $\vec{E}$ entre les armatures (en utilisant le théorème de Gauss),
- Calcul de la circulation du champ d'une armature à l'autre ($V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$).

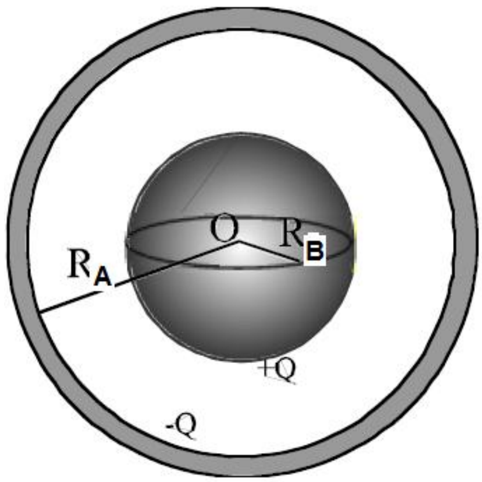
Connaissant la charge Q , on calcul $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$.

(a) Condensateur sphérique

Nous avons vu plus haut que la capacité d'un conducteur sphérique de rayon $\boldsymbol{R_B}$ est donnée par $\boldsymbol{C' = 4\pi\varepsilon_0 R_B}$



Si la sphère de rayon $\boldsymbol{R_B}$ est complètement entourée par une autre sphère de rayon intérieur $\boldsymbol{R_A}$ et que V = V_B-V_A est la ddp entre les deux sphères.



D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point M situé à un rayon r entre les deux armatures vaut :

$\boldsymbol{\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\vec{u}_r}$

Et

$$\boldsymbol{V_B - V_A = \int_{R_B}^{R_A} E.dr}$$

$$\boldsymbol{= \int_{R_B}^{R_A} \frac{kQ}{r^2}.dr}$$

$$\boldsymbol{V_B - V_A = kQ(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A})}$$

$$\boldsymbol{V_B - V_A = \frac{kQ(R_A - R_B)}{R_A.R_B}}$$

La capacité $\boldsymbol{C = \frac{Q}{V_B - V_A} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_A.R_B}{R_A - R_B}}$

Remarque

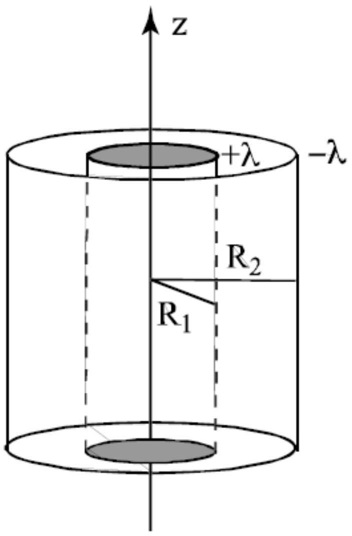
Pour une même ddp, la charge $\boldsymbol{Q_B}$ portée par le conducteur sphérique est inférieure à la charge **Q** qui sera portée par le même conducteur entouré par la sphère.

$\boldsymbol{V_B - V_A = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B} = \frac{Q(R_A - R_B)}{4\pi\varepsilon_0 R_A.R_B} \Rightarrow Q = \frac{R_A}{R_A - R_B} Q_B > Q_B}$

Il y a condensation de charge.

(b) Condensateur cylindrique

Soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de longueur infinie, de rayons R_1 et R_2 , séparées par un vide ($R_2 > R_1$). Soit λ la charge par unité de longueur du cylindre intérieur. D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique entre les deux armatures s'écrit :



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

en coordonnées cylindriques, ce qui donne une tension

$$V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E.dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{R_2}{R_1}$$

et une capacité par <u>unité de longueur</u>

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\frac{R_2}{R_1}}$$

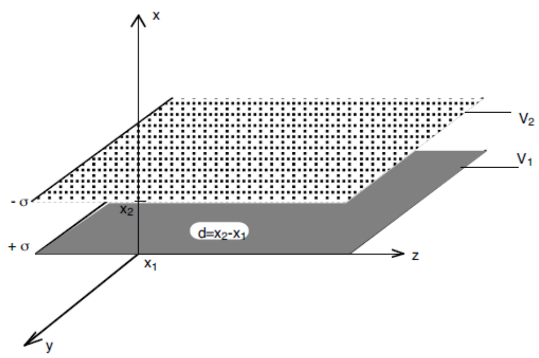
(c) Condensateur plan

Soient deux armatures (A1) et (A2) planes parallèles infinies, orthogonales à un même axe Ox de vecteur unitaire $\vec{\imath}$ et situées à une distance $d = x_2 - x_1$ l'une de l'autre. L'armature (A1) porte une densité surfacique de charges +σ et (A2), en vertu du théorème des éléments correspondants, porte une densité -σ. Entre les deux armatures, le champ électrostatique est la superposition des champs créés par ces deux plans infinis, c'est-à-dire

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{\imath})$

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath}$

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors :



$$V = V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E}.d\vec{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

D'où une capacité par unité de surface

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S\varepsilon_0}{\sigma d} = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

Energie électrique d'un condensateur

C'est l'énergie que l'on récupère lorsque l'on court-circuite les armatures du condensateur après l'avoir isolé de la source.

Si nous soumettons les armatures 1 et 2 d'un condensateur à une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$, il apparaît sur les armatures des charges
$\boldsymbol{Q_1 = -Q_2}$ « Théorème de éléments correspondants »

$$\boldsymbol{Q_1 = -Q_2 = Q = CV}$$

$\boldsymbol{C}$ étant la capacité du condensateur.
L'énergie U_e associée à ces charges libres, habituellement appelée « énergie du condensateur U_c »,

$$\boldsymbol{U_c = \frac{1}{2}(Q_1V_1 - Q_2V_2) = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2}$$

U_c correspond à l'énergie que le générateur doit fournir au condensateur pour le charger. soit dU l'énergie nécessaire pour amener la charge supplémentaire dq sur l'armature portant au préalable la charge q ($V(q) = \frac{q}{C}$) . En intégrant cette énergie infinitésimale entre l'état initial (charge nulle) et l'état final (charge Q) :

$$\boldsymbol{dU = Vdq = \frac{q}{c}dq}$$

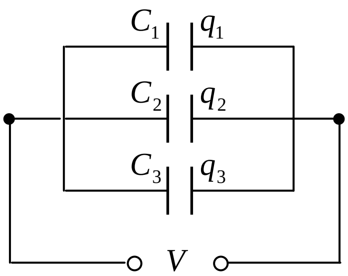
$$\boldsymbol{U = \int_0^Q \frac{q}{c}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

L'énergie U_c est donc l'énergie emmagasinée dans le condensateur au cours du processus d'accumulation de charge sur ses armatures. Elle sera restituée lors de sa décharge.

Associations de condensateurs

(a) Condensateurs en parallèle

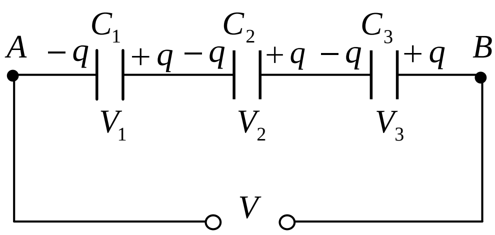
Soient n condensateurs de capacités $\boldsymbol{C_i}$ mis en parallèle avec la même tension $\boldsymbol{V = V_1 - V_2}$. La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par $\boldsymbol{Q_i = C_i.V}$. La charge électrique totale est simplement :



$$\boldsymbol{Q = \sum_i Q_i = (\sum_i C_i)V}$$

ce qui correspond à une capacité équivalente
$\boldsymbol{C = \sum_i C_i}$
qui est la somme des capacités individuelles.

(b) Condensateurs en série



Soient n condensateurs de capacités $\boldsymbol{C_i}$ mis en série les uns derrière les autres. On porte aux potentiels V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne et on apporte la charge Q sur le premier condensateur.

En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge ±Q (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La tension totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit alors simplement :

$V = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \cdots + (V_{n-1} - V_n)$

$$\boldsymbol{V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + .. + \frac{Q}{C_n} = (\sum_i \frac{1}{C_i})Q}$$

et correspond à celle d'une capacité unique Cde capacité équivalente

$$\boldsymbol{\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Exemple :

Sur la figure ci-contre, initialement les condensateurs ne sont pas chargés. Au début l'interrupteur est en position S_1 puis en position S_2.

Les valeurs des capacités sont C_1=1nF, C_2=2nF, …etc. V=100V

Calculer l'énergie emmagasinée dans C4 lorsque l'interrupteur est sur la position S_2.