

**EXAMEN FINAL**  
**LAT 325**

**Exercice 1** : (7.5 points)

1. Laquelle (ou lesquelles) des itérations suivantes :

a)  $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{4} \left( x_n^2 + \frac{6}{x_n} \right)$

b)  $x_{n+1} = f(x_n) = \left( 6 - \frac{4}{x_n^2} \right)$

c)  $x_{n+1} = h(x_n) = \left( 4 - \frac{6}{x_n^2} \right)$

est (ou sont) adaptée(s) pour trouver la racine de l'équation  $x^3 = 4x^2 - 6$  dans l'intervalle  $I=[3, 4]$  ? (justifier votre réponse).

2. En utilisant l'itération appropriée et en partant de l'estimé initial  $x_0 = 3$ , estimer le nombre d'itérations nécessaire pour approximer cette racine à  $10^{-3}$  près.

3. Déterminer l'ordre de convergence de la méthode itérative utilisée précédemment.

**Exercice 2** : (5 points)

On désire approcher la racine  $x^* \in [2.5 ; 2.8]$  d'une certaine équation  $f(x) = 0$ .

L'application de la méthode de Newton a produit les itérés suivants :

| $n$   | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_n$ | 2.61421 | 2.62453 | 2.63151 | 2.63621 | 2.63937 | 2.64149 |

1. Déterminer l'ordre de convergence de l'algorithme pour la racine  $x^*$ . On utilisera la définition suivante de l'erreur à l'itération  $n$ :  $e_n = |x_{n+1} - x_n|$ .

2. Quelle est la multiplicité de la racine de  $f$ . Justifier.

**Exercice 3** : (7.5 points)

Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ . On souhaite trouver le polynôme d'interpolation  $P_2(x)$  de degré 2 de  $f$  relatif aux nœuds :  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 4$ .

1. Déterminer les polynômes de Lagrange correspondant à ces nœuds.

2. Ecrire  $P_2(x)$  sous forme de Lagrange.

3. Déterminer la table des différences divisées relative aux nœuds :  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 4$ .

4. Ecrire  $P_2(x)$  sous forme de Newton.

5. Evaluer une approximation de  $f$  au point  $x = 3$  ;

6. Calculer une majoration de l'erreur  $E_{maj}$  d'approximation par interpolation de  $f(2.5)$

7. Quelle est l'erreur exacte d'approximation de  $f(2.5)$ .