2015/2016

Corrigé examen Final
LAT 325

Exercice 1 : (7.5 pts)

1. a) $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + \frac{6}{x_n}\right)$

- Les points Fixes de $g(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{6}{x}\right)$ sont-ils racines de $F(x) = x^3 - 4x^2 + 6$?

0,5 $x = \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{6}{x}\right) \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 6 = 0 \Rightarrow$ Les points Fixe de $g(x)$ sont les racines de $F(x)$.

- Convergence (Les points Fixes de $g(x)$ sont-ils attractifs)

* $g(x)$ est continue sur $[3,4]$

0,5 * $g'(x) = \frac{1}{4}\left(2x - \frac{6}{x^2}\right) > 1 \quad \forall x \in [3,4]$

$\Rightarrow x_{n+1} = g(x_n)$ est divergent (les points fixes de g sont répulsifs) $\Rightarrow g(x_n)$ ne convient pas

b) $x_{n+1} = f(x_n) = \left(6 - \frac{x}{x_n^2}\right)$

$x = f(x) \overset{?}{\Rightarrow} F(x) = 0$

0,5 $x = 6 - \frac{x}{x^2} \Rightarrow x^3 = 6 - x \Rightarrow x^3 + x - 6 \neq F(x)$

$\Rightarrow$ les points fixes de $f(x)$ ne sont pas racine de $F(x) = 0$

$\Rightarrow f(x_n)$ ne convient pas

c) $x_{n+1} = h(x_n) = 4 - \frac{6}{x_n^2}$

* $x = 4 - \frac{6}{x^2} \Rightarrow x^3 - 4x^2 - 6 = 0 \Rightarrow$ les points fixe de

0,5 $h(x)$ sont racine de $F(x) = x^3 - 4x^2 - 6 = 0$.

* Convergence (points Fixes attractifs ?).

$g'(x) = \frac{12}{x^3} \Rightarrow \max_{x \in [3,4]} |g'(x)| = \left.\frac{12}{x^3}\right|_{x=3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} < 1$

1,5 $\Rightarrow$ les points fixes de $h(x)$ dans $[3,4]$ sont attractifs donc $h(x_n)$ convient pour trouver les racines de l'equation $x^3 = 4x^2 - 6$.

2) Erreur majorée :

$$E_n = |x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

avec : $\begin{cases} k = \max |h'(x)| = 4/9 \\ x_0 = 3 \\ x_1 = 4 - \frac{6}{x_0} = 4 - \frac{6}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}$

$\varepsilon = 10^{-3}$ (précision).

$$\frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln \left| \frac{x_1 - x_0}{(1-k)\varepsilon} \right|}{-\ln k} = \frac{\ln \left| \frac{\frac{10}{3} - 3}{1 - 4/9} 10^3 \right|}{-\ln(4/9)}$$

2

$$n \geq \frac{\ln(600)}{\ln(\frac{9}{4})} = 7{,}888 \longrightarrow n = 8$$

$\Rightarrow$ le nombre d'itérations nécessaire pour approximer cette racine à 10^{-3} près est $n = 8$.

3) Ordre de convergence.

$$h'(x) = \frac{12}{x^3} \neq 0 \quad \forall x \in [3,4]$$

1,5

$\Rightarrow$ La convergence est donc linéaire (d'ordre 1).

Exercice 2 : (5pts)

Dressons le tableau :

n	x_n	$e_n = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	e_{n+1}/e_n
4	2,61421	0.01032	0.676356
5	2,62453	0.00698	0.673352
6	2,63151	0.0047	0.672340
7	2,63621	0.00316	0.670886
8	2,63937	0.00212	—
9	2,65149	—	—

1 1

P2

- on remarque que :
* $e_n \longrightarrow 0$ quand n augmente
* $\frac{e_{n+1}}{e_n} \longrightarrow 0.67 \neq 0$:

La convergence est donc linéaire.

01

de plus le taux de convergence est donné par $|g'(x)| \simeq \frac{e_{n+1}}{e_n} = 0{,}67$

2) Ordre de multiplicité de la racine de f.

Pour la méthode de Newton, on a

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \simeq |g'(x^*)| = g'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}$$ où m est la multiplicité de la racine.

2

$$g'(x^*) \simeq 1 - \frac{1}{m} = 0,67 \Rightarrow m \simeq 3$$

$\rightarrow$ donc la racine est de multiplicité 3.

Exercice 3 : (7,5 pts)

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2x+1}$

1) Polynomes de Lagrange :

$L_0(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x-4)$ 0,5

$L_1(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$ 0,5

$L_2(x) = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$ 0,5

2) $P_2(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) \cdot f(x_2)$

$= \frac{1}{3} L_0(x) + \frac{1}{5} L_1(x) + \frac{1}{9} L_2(x)$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{1}{9}(x-2)(x-4) - \frac{1}{10}(x-1)(x-4) + \frac{1}{54}(x-1)(x-2)}$$ 0,75

3) Tableau des différences divisées :

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$
$x_0 = 1$	$1/3$	—	—
$x_1 = 2$	$1/5$	$-2/15$	—
$x_2 = 4$	$1/9$	$-2/45$	$4/135$
	0,5	0,5	0,5

$C_0 = 1/3$

$C_1 = -2/15$

$C_2 = 4/135$

4) $P_2(x) = C_0 + C_1(x-1) + C_2(x-1)(x-2)$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}(x-1) + \frac{4}{135}(x-1)(x-2)}$$ 1

5) $f(3) \simeq P_2(3) = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} \times 2 + \frac{4}{135}(2)(1) = 0,1259$

$$\boxed{f(3) \simeq 0,1259}$$ 0,75

6) Majoration de l'erreur pour approximer f(2,5):

$$E_{maj} \leq \frac{M_3}{3!} \left| (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right|$$

où $M_3 = \underset{x \in [1,4]}{Max} \left| f^{(3)}(\cancel{x}) \right|$

$f(x) = \frac{1}{2x+1}$; $f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$; $f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$; $f'''(x) = -\frac{48}{(2x+1)^4}$

$$M_3 = \max_{x \in [1,4]} \left| \frac{-48}{(2x+1)^4} \right| = \left. \frac{48}{(2x+1)^4} \right|_{x=1} = \frac{48}{3^4} = \frac{48}{81} = 0{,}5926$$

$$E_{maj} \leq \frac{0.5926}{6} \left| (2.5-1)(2{,}5-2)(2.5-4) \right|$$

$$E_{maj} \leq \frac{0{,}5926}{6} \left| (1{,}5)(0{,}5)(-1{,}5) \right| = 0.111$$

$$\boxed{E_{maj} \leq 0.111}$$

1,5

7) Erreur exacte.

$$E_{exacte} = f(2.5) - P_2(2.5)$$

$$\begin{cases} f(2{,}5) = \frac{1}{2(2{,}5)+1} = \frac{1}{6} = 0{,}1667 \\ P_2(2{,}5) = 0.1556 \end{cases}$$

$$E_{exacte} = 0{,}1667 - 0{,}1556 = 0.0111$$

l'erreur exacte est donc:

$$\boxed{E_{exacte} = 0.0111}$$

0,5