Plan de l'exposé

Electromagnétisme (Equation de Maxwell)

1. Grandeurs Electromagnétiques,
2. Equations de Maxwell,
3. Relations des milieux,
4. Conditions de passage d'un milieu à autre
5. Loi de Gauss (Phénomène électrostatique)
6. Conservation de la charge électrique
7. Conservation du flux magnétique
8. Théorème d'Ampère
9. Phénomène d'induction – loi de Faraday
10. Potentiel magnétique vecteur A et scalaire V
11. Electrostatique
12. Magnétostatique – Loi de Biot et Savart
13. Régime quasi stationnaire – Champ proche
14. Propagation d'ondes – Champ lointain
15. Loi de Biot et Savart
16. Champs créés par des circuits particuliers

Grandeurs électromagnétiques

Dans tous les problèmes qui nécessitent la détermination du champ électromagnétique qui règne à chaque instant aux divers points d'un système matériel, en particulier les problèmes relatifs à la propagation des ondes, on a à utiliser les équations de Maxwell et trouver les grandeurs locales suivantes :

- Un système de champs électrique $\vec{E}[V/m]$ et magnétique $\vec{H}[A/m]$
- Un système d'inductions électrique $\vec{D}\left[A.s/m^2\right]$ et magnétique $\vec{B}[T]$
- Un champ vectoriel électrique densité de courant $\vec{J}\left[A/m^2\right]$
- Un champ scalaire électrique charge d'espace $\rho\left[C/m^3\right]$

Equations de Maxwell

La loi de Faraday, le théorème d'Ampère et le théorème de Gauss ont été réunis par James Clerk Maxwell (1831-1879). Ce savant a été capable de donner les découvertes une formulation la plus complète de l'électromagnétisme liant les grandeurs électriques et magnétiques dans les quatre équations aux dérivées partielles suivantes:

1. Equation de Maxwell-Ampère : $r\vec{o}t\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
2. Equation de Maxwell-Faraday : $r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
3. Equation de Maxwell-Gauss : $div\vec{D} = \rho$
4. Equation de Maxwell-flux : $div\vec{B} = 0$

Relations dans les milieux

- Les grandeurs des champs vectoriels dépendent des propriétés du milieu où ils règnent.
- Pour compléter la description électromagnétique, il faut ajouter aux équations précédentes les équations de comportement des milieux.

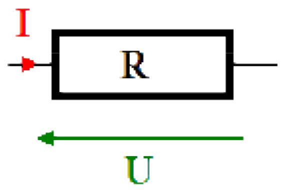
  - Milieu isolant,
  - Milieu conducteur,
  - Milieu magnétique,
  - Milieu diélectrique.

Relations dans les milieux

- Milieu conducteur et isolant -

Les grandeurs des champs vectoriels dépendent des propriétés du milieu où ils règnent. Pour compléter la description électromagnétique, il faut ajouter aux équations précédentes les équations de comportement des milieux.

- Milieu conducteur (loi d'Ohm) : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$



$$U = RI$$

σ : Conductivité électrique $[\Omega.m]^{-1}$

$\rho = 1/\sigma$: Résistivité électrique $[\Omega.m]$

Pour une tension sinusoïdale et en notation complexe la loi se généralise : $U = ZI$ où Z est l'impédance.

- Milieu isolant ($\sigma = 0 \Rightarrow \rho \to \infty$ et $R \to \infty$) : $\vec{J} = \vec{0}$

http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_d'Ohm

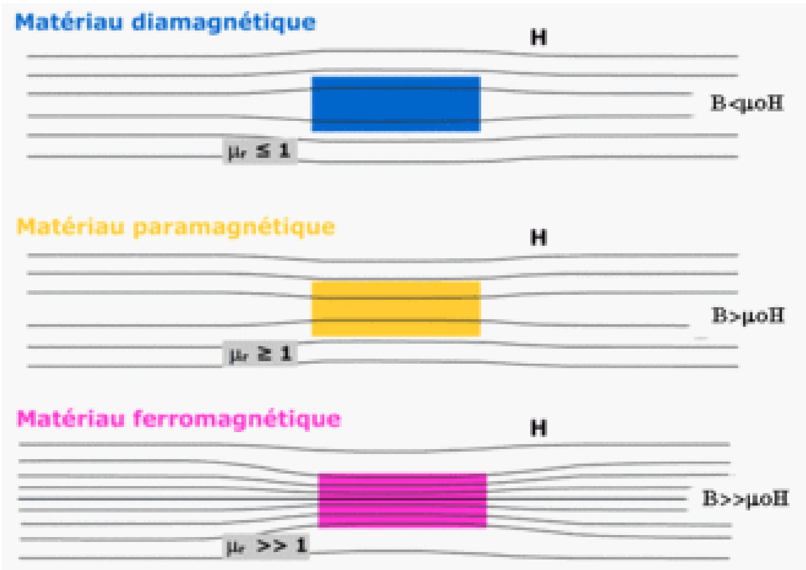
Relations dans les milieux

- Milieu Magnétique -

❖ Milieu magnétique : $\vec{B} = \mu \vec{H}$ avec $\mu = \mu_0 \mu_r$

μ_r: Perméabilité magnétique relative du milieu

$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} [H / m]$ Perméabilité magnétique du vide



•Matériaux diamagnétiques : argent, cuivre, eau, or, plomb, zinc...),

•Paramagnétiques : air, aluminium, magnésium, platine...

•Ferromagnétiques : cobalt, fer, métal, nickel...

➢Matériaux diamagnétiques et Paramagnétiques : $\mu_r \cong 1$

➢Ferromagnétiques : $\mu_r > 1$; ces matériaux canalise le champs magnétique

Relations dans les milieux

❖ Milieu diélectrique : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

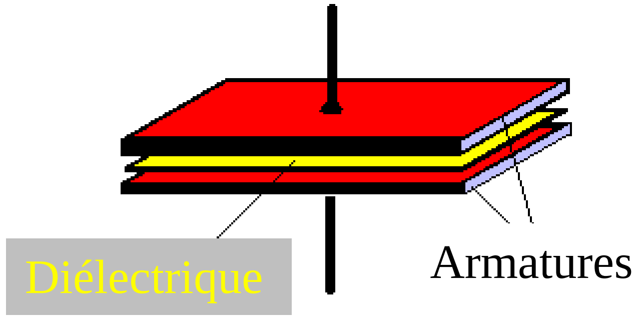
ε: Permittivité diélectrique appelée aussi constante diélectrique

ε_r: Permittivité diélectrique relative du milieu

$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ Permittivité diélectrique du vide

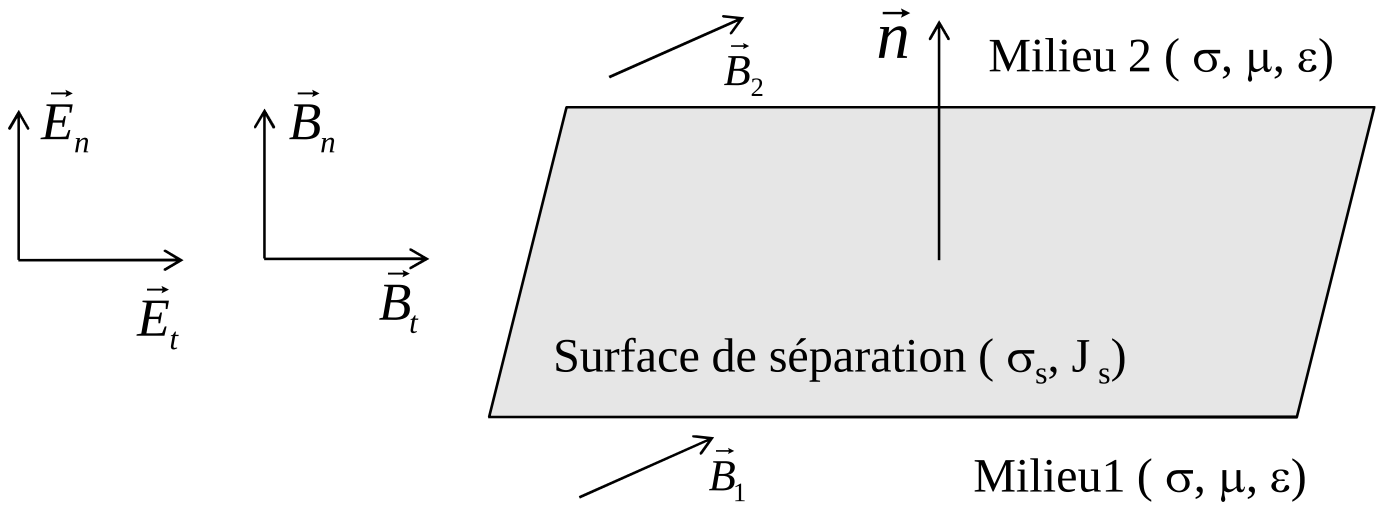
$\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi\,[F/m]$

$c[m/s]$: Vitesse de la lumière



Conditions de passage d'un milieu à autre

- Nous avons définies toutes les liaisons : source/champs, électrique/magnétique et caractéristiques du milieu.
- Il reste à définir les relations entre les grandeurs de deux milieux électriquement et magnétiquement différents.
- Pour cela, on intègre les équations de Maxwell entre deux points très voisins de part et d'autre d'une surface séparant ces deux milieux.



Conservation des champs

❖ La conservation de la composante tangentielle du champ électrique :

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \times \vec{n} = \vec{0} \Rightarrow E_{t2} = E_{t1}$$

❖ La conservation de la composante normale de l'induction magnétique :

$$\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow B_{n2} = B_{n1}$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface de séparation dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

Discontinuité des champs

- La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique due aux courants surfaciques (JS) s'ils existent:

$$\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\times \vec{n} = \vec{J}_S \times \vec{n} \Rightarrow H_{t2} - H_{t1} = J_S$$

Où Js est densité de courant sur la surface de séparation des deux milieux

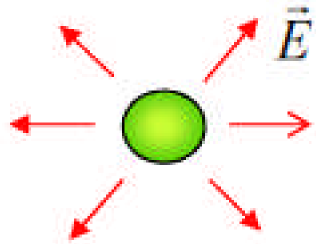
- La discontinuité de la composante normale de l'induction électrique due aux charges surfaciques (qS) si elles existent:

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot \vec{n} = q_S \Rightarrow D_{n2} - D_{n1} = q_S \Rightarrow E_{n2} - E_{n1} = \frac{q_S}{\varepsilon}$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface de séparation dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

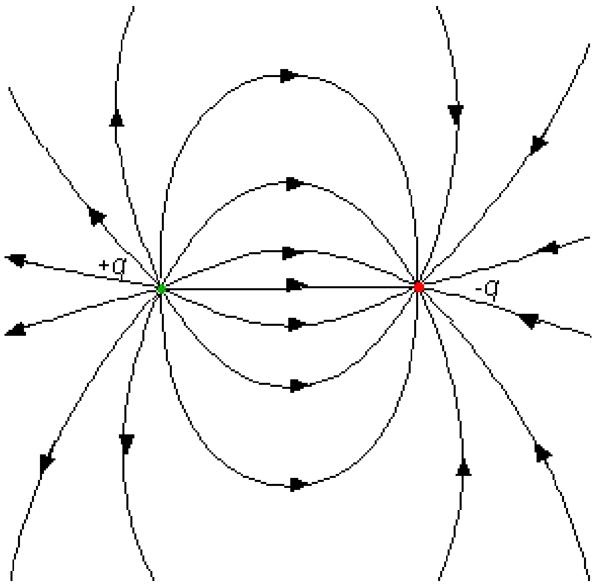
Loi de Gauss (Phénomène électrostatique)

Equ. M-G : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$



En faisant l'intégrale sur le volume des membres de l'équation I.8 et en tenant compte des relations suivantes :

$$\begin{cases} \iiint_\tau \left(div\vec{E}\right) d\tau = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} & : Formule\ \ d'Ostrogorski \\ \iiint_\tau \rho\, d\tau = Q & : Chaques\ \ électriques \end{cases}$$



Nous aboutissons au théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

- Le champ électrique est créé par les charges électriques,
- Les lignes de champs débutent par les charges positives et finisses par les charges négatives.

Conservation de la charge électrique

Equ. M-A : $r\vec{o}t\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

La divergence de l'équation Maxwell-Ampère donne :

$$div\left(r\vec{o}t\vec{H}\right) = div\vec{J} + \frac{\partial\left(div\vec{D}\right)}{\partial t}$$

- Le premier membre est nul car la divergence du rotationnel est nulle.
- Le second terme du second membre peut être simplifié en faisant intervenir l'équation de M-G $(div\vec{D} = \rho)$.

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En faisant intervenir la loi d'Ohm ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$) et en tenant compte une autre fois de l'équation M-G, on arrive à l'équation de conservation de la charge électrique :

$$\rho + \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Conservation du flux magnétique

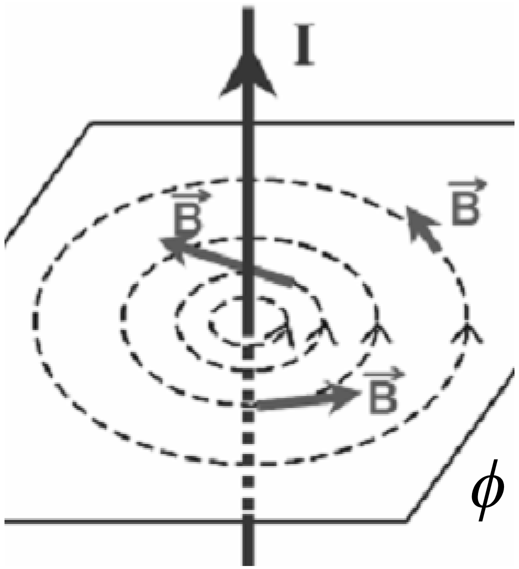
Equ. M-Flux : $div\vec{B} = 0$

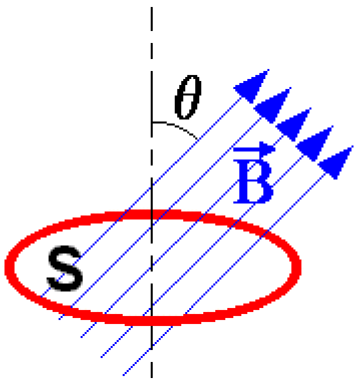
En faisant l'intégrale sur le volume et en tenant compte de la formule d'Ostrogradski, nous arrivons à :

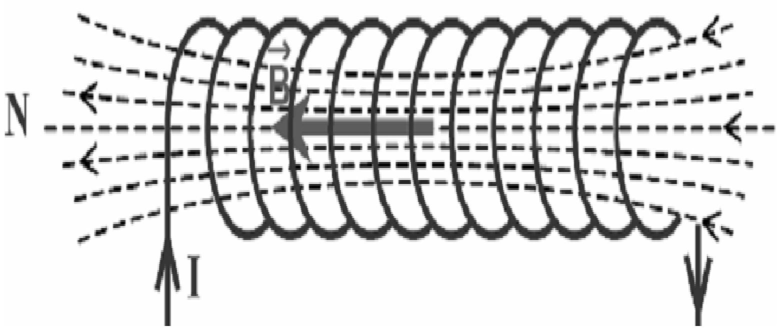
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Elle exprime que :

- il n'existe pas de charges magnétiques
- Les lignes de champs magnétiques n'ont ni début ni fin.







$$\phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oiint_S B\cos\theta\, dS$$

Théorème d'Ampère

Equ. M-A : $r\vec{o}t\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

En introduisant :

- La relation magnétique : $\vec{B} = \mu \vec{H}$
- La relation diélectrique : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

dans l'équation de M-A et elle devient : $r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

On applique l'intégrale de surface: $\iint_S r\vec{o}t\vec{B}\, d\vec{S} = \mu_0 \left(\iint_S \vec{J}\, d\vec{S} + \varepsilon_0 \iint_S \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \right)$

En tenant compte : $\iint_S r\vec{o}t\vec{B}\, d\vec{S} = \oint_C \vec{B}\, d\vec{l}$ $\quad I = \iint_S \vec{J}\, d\vec{S}$ $\quad I_D = \varepsilon_0 \iint_S \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$

Théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = I + I_D$ Pour N spires : $\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = NI + NI_D$

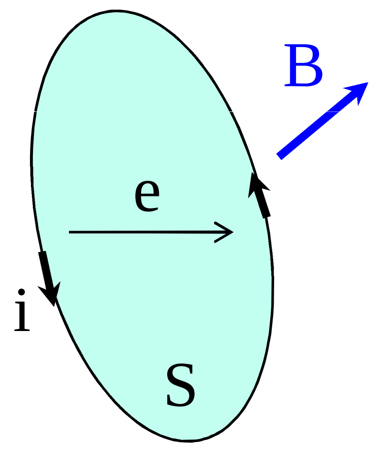
- « I » courant de conduction résultant du déplacement des charges électriques
- « I_D » courant de déplacement, il résulte de la variation temporelle du champ électrique. Il est à l'origine de l'effet de propagation dans l'air.

Phénomène d'induction – loi de Faraday

Equ. M-F : $r\vec{o}t\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

De la même manière que précédemment, l'intégrale de surface de l'équation M-F donne la forme suivante :

$$\iint_S r\vec{o}t\vec{E}\,d\vec{s} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{s} \quad \Rightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$$



$$\begin{cases} e = \oint_C \vec{E}\,d\vec{l} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} & (a) \\ avec\ \Phi = \iint_S \vec{B}\,d\vec{s} & (b) \end{cases}$$

- « e » est une force électromotrice induite (tension)
- Φ est le flux magnétique à travers la surface S.

- « I » courant de conduction résultant du déplacement des charges électriques
- « I_D » courant de déplacement, il résulte de la variation temporelle du champ électrique. Il est à l'origine de l'effet de propagation dans l'air.

Potentiel magnétique vecteur A et scalaire V

De l'équation M-G $(div\vec{B}=0)$, on en déduit que : $\vec{B}=r\vec{o}t\vec{A}$

On dit que l'induction magnétique B dérive d'un potentiel magnétique vecteur A

Cela vient du fait que : $div(r\vec{o}t\vec{A})=0$

Si l'on introduit la relation $\vec{B}=r\vec{o}t\vec{A}$ dans l'équation de M-F, il vient:

$$r\vec{o}t\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad r\vec{o}t\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(r\vec{o}t\vec{A}\right) \quad\Rightarrow\quad r\vec{o}t\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\left(r\vec{o}t\vec{A}\right)=0$$

$$r\vec{o}t\vec{E}+\left(r\vec{o}t\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad r\vec{o}t\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-gr\vec{a}dV$$

Soit : $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-gr\vec{a}dV$ Dans le cas du régime permanent : $\vec{E}=-gr\vec{a}dV$

Electrostatique

- Phénomène magnétostatique nul
- Variations temporelle nulle

2. Equ. M-F : $r\vec{o}t\vec{E} = 0$

3. Equ. M.-G : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

De l'équa. 2. on a le théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}$

Champ électrique créé par des particules chargés et représente la solution du théorème de Gauss : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}$

Circulation : $r\vec{o}t\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -gr\vec{a}dV$ car : $r\vec{o}t\left(gr\vec{a}d\right) = 0$

On dit que le champ électrique E dérive d'un potentiel V

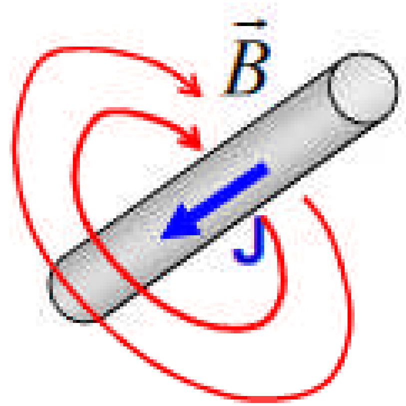
Energie potentiel électrostatique : $W = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2$ où C: capacité

Magnétostatique – Loi de Biot et Savart

- Phénomène électrostatique nul
- Variations temporelle nulle

1. Equ. M-A : $r\vec{o}t\vec{H} = J$

4. Equ. M.-G : $div\vec{B} = 0$

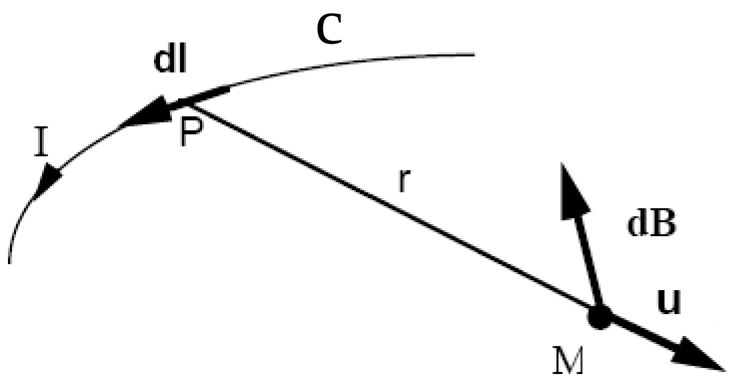


De l'équa. 1. on a le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = I$$

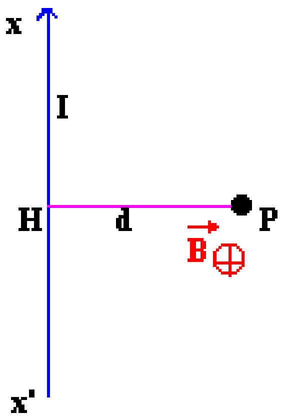
La solution du théorème d'Ampère est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_l \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$$



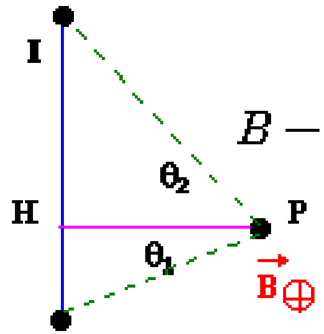
Champs créés par des circuits particuliers

Fil rectiligne infini :



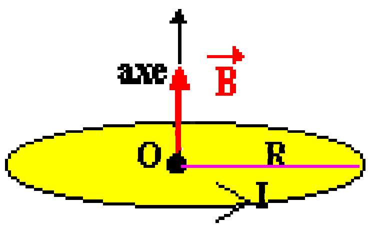
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi d}$$

Fil rectiligne fini :



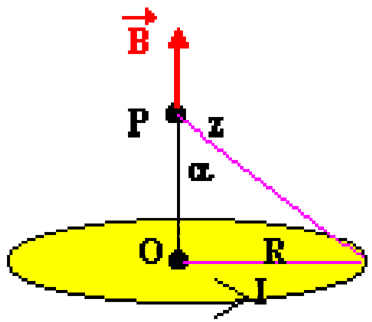
$$B = \frac{\mu_o}{4\pi d} I(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Spire circulaire de rayon R (An centre O) :



$$B_o = \frac{\mu_o I}{2R}$$

Spire circulaire de rayon R (En un point de son axe) :

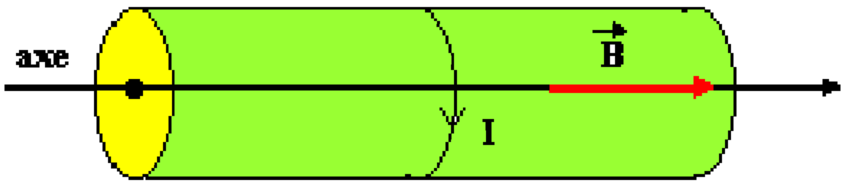


$$B_P = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3\alpha$$

Bobine plate de N spire (bobines de HELMHOLTZ) : $B_N = N\, B_o$

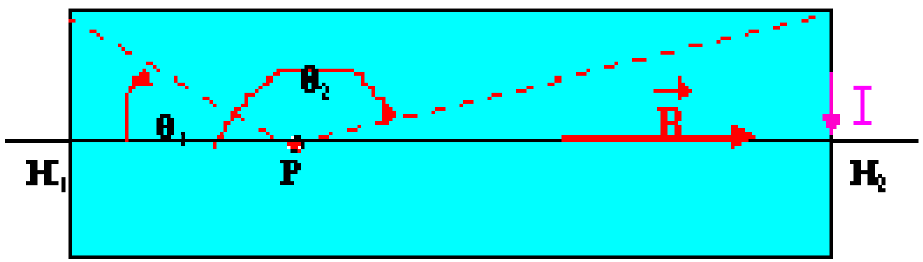
Champs créés par des circuits particuliers

Solénoïde infini :



$$B_x = \mu_o n I$$

Solénoïde fini :



$$B_P = \frac{n\mu_o I}{2}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)$$

n : le nombre de spire par mettre

Régime quasi stationnaire – Champ proche

En basses fréquences et/ou dans un milieu conducteur (Electrotechnique), l'aspect propagation du champ électromagnétique est négligé : C'est l'approximation des états quasi stationnaires ou des régimes lentement variables ou champ proche.

- Les dimensions de la zone où règne le champ sont petites devant la longueur d'onde (λ=C/f) (C représente la célérité de la lumière).
- Pour une fréquence de l'ordre de 1MHz, la longueur d'onde est de 300m ; ce qui justifie parfaitement l'emploi de cette approximation dans l'étude des dispositifs de dimensions usuelles.
- Les caractéristiques électriques du matériau permettent à leur tour de négliger les effets capacitifs des conducteurs.

Champ proche – Propagation négligée

L'utilisation de cette approximation, revient à :

- Négliger le courant de déplacement ($J_D = \partial \vec{D} / \partial t$) devant le courant de conduction ($J = \sigma E$).
  - Pour un matériau conducteur, cette condition est largement remplie.
  - Pour s'en rendre compte, il suffit de calculer, dans le cas d'une excitation sinusoïdale, le rapport entre ces deux courants.

$$\frac{\left\| \vec{J}_D \right\|}{\left\| \vec{J}_C \right\|} = 2\pi f \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Pour f = 1 MHz et $\sigma = 10^6$ $(\Omega m)^{-1}$, ce rapport est de l'ordre de $0.5\ 10^{-15}$

Champ proche – Charges négligées

L'utilisation de cette approximation, revient aussi à :

- Négliger la charge d'espace ρ dans les conducteurs

$$\rho + \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

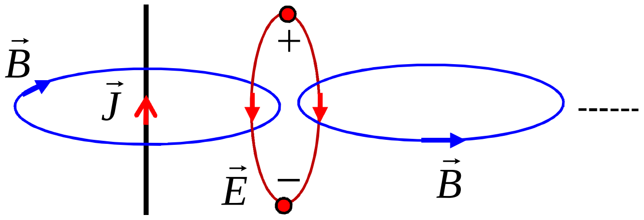
La solution de l'équation de conservation de la charge électrique :

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \qquad \tau \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow 0$$

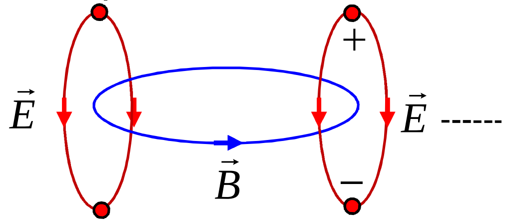
- $\tau = \varepsilon/\sigma = 10^{-18}$ secondes; c'est une constante de temps très faible.
- La charge d'espace dans les conducteurs s'atténue très rapidement par retour à la neutralité électrique.
- Il peut toutefois exister des charges électriques sur le pourtour du conducteur mais alors, celles-ci sont statiques et ne contribuent pas au phénomène d'induction.

Champ lointain – Création d'ondes Electromagnétiques

- En électrostatique, sans charges électriques, il n'y aura pas de champ électrique.
- En magnétostatique, sans courant électrique, il n'y aura pas de champ magnétique.
- Dans les cas dynamiques où le champ électromagnétique (E, B) dépend du temps, le phénomène est autre.
  - Une onde peut être créée soit :
    - ✓ à partir des charges électriques créant E ensuite B,
    - ✓ ou à partir des courants électriques créant B ensuite E.



Source de Courant



Source de charge

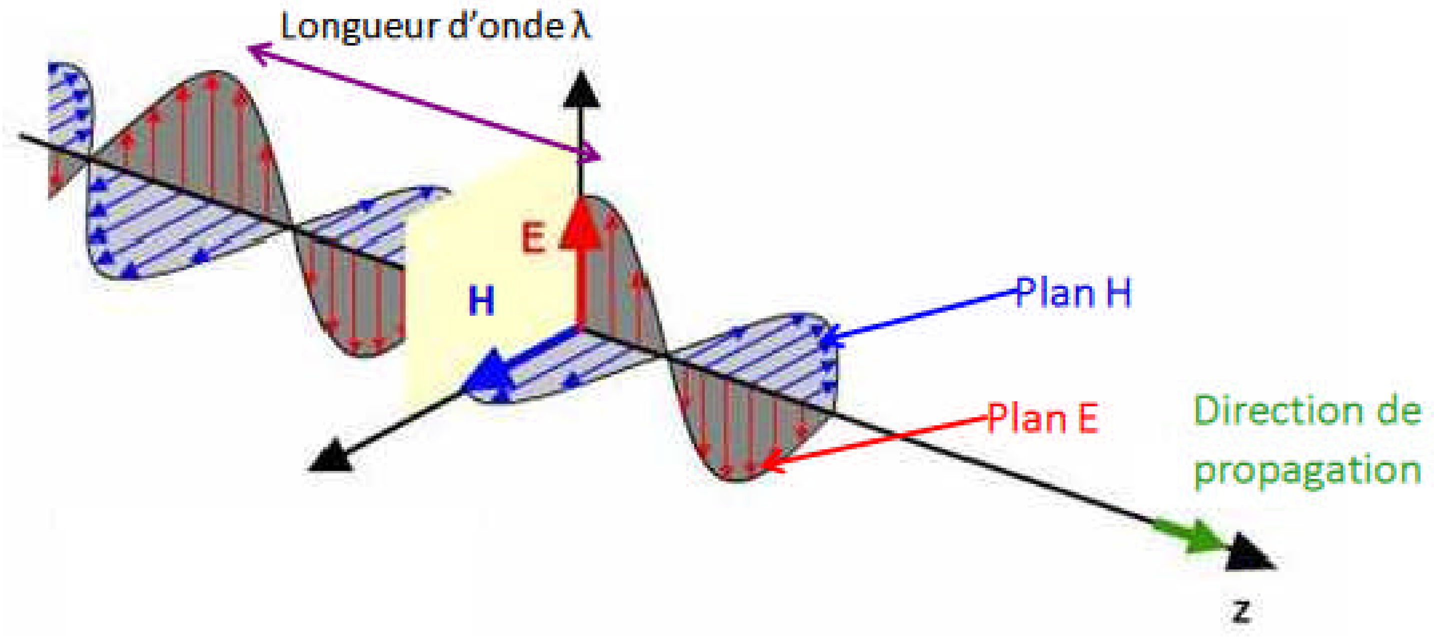
Ondes Electromagnétiques – Termes de couplage

1. Equ. M-A : $r\vec{o}t\vec{B} = \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2. Equ. M-F : $r\vec{o}t\vec{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

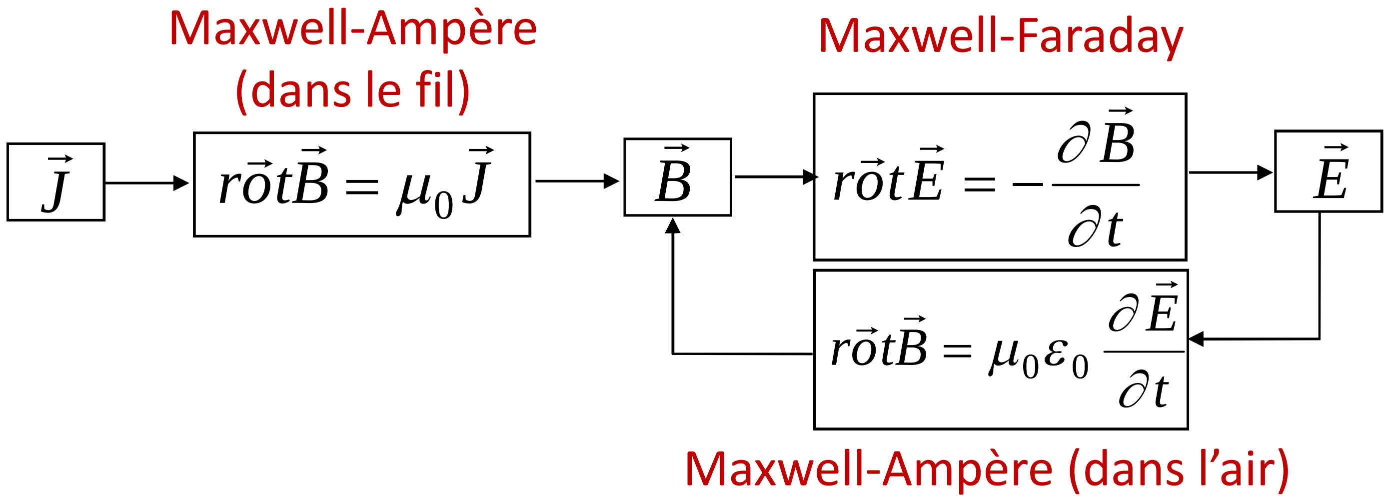
Terme de couplage électrique

Terme de couplage magnétique



Ondes Electromagnétiques – Courant comme source

- A partir des courants, d'après la loi de Maxwell-Ampère, un courant électrique variable dans le temps, génère un champ magnétique variable.
- Ce champ créé à son tour, d'après la loi de Maxwell-Faraday, un champ électrique variable.
- Ce champ électrique est bien créé sans qu'il y ait de charges électriques. Il crée à son tour un champ magnétique variable,
- Et ainsi de suite.



Ondes Electromagnétiques – Charges électrique comme source

- A partir des charges électriques et d'après la loi de Maxwell-Gauss, un champ électrique est créé.
- Ce dernier s'il est variable, va créer un champ magnétique variable sous la loi de Maxwell-Ampère appliquée dans vide.
- Ce champ magnétique est bien créé sans qu'il ait de courant électrique. Il créé à son tour, d'après la loi de Maxwell-Faraday, un champ électrique variable.
- Et ainsi de suite.

Maxwell-Gauss
(dans le fil)

Maxwell-Ampère
(dans l'air)

ρ

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$

$$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

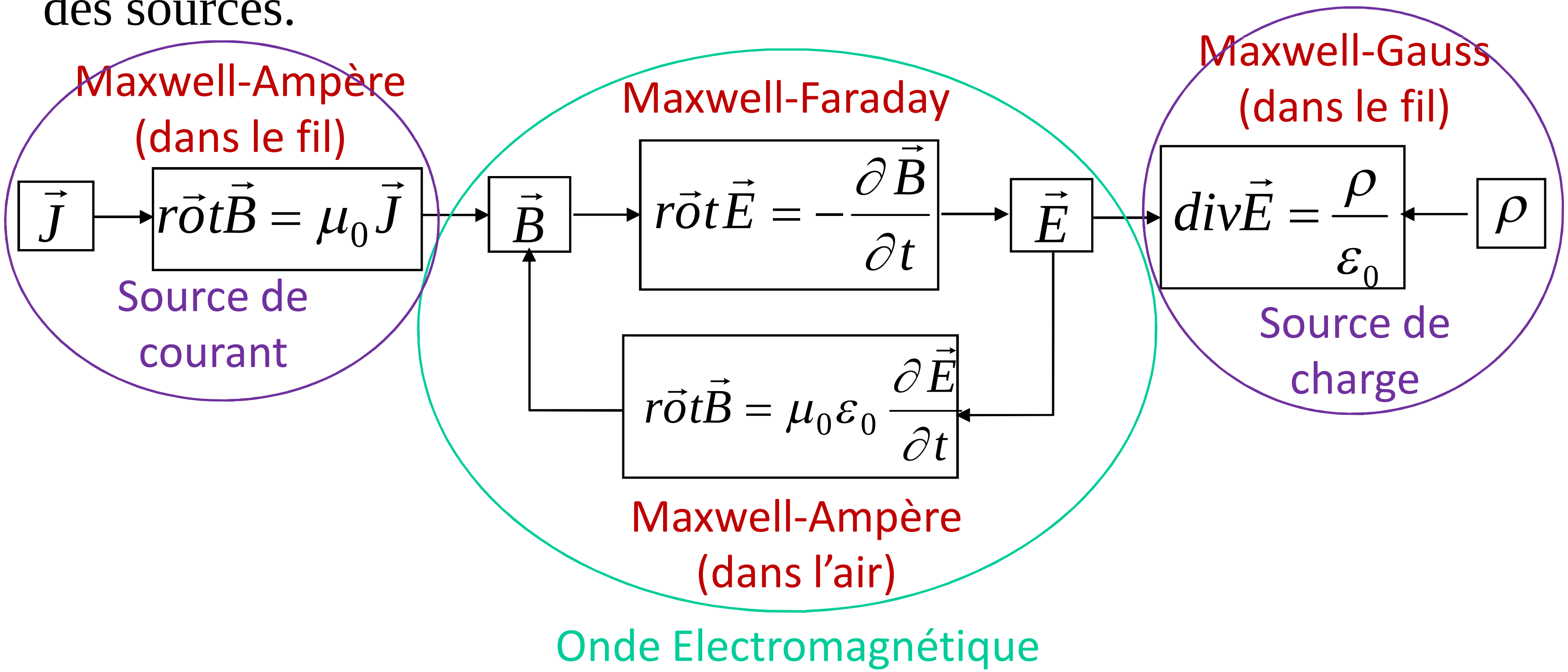
$\vec{B}$

$$r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwell-Faraday

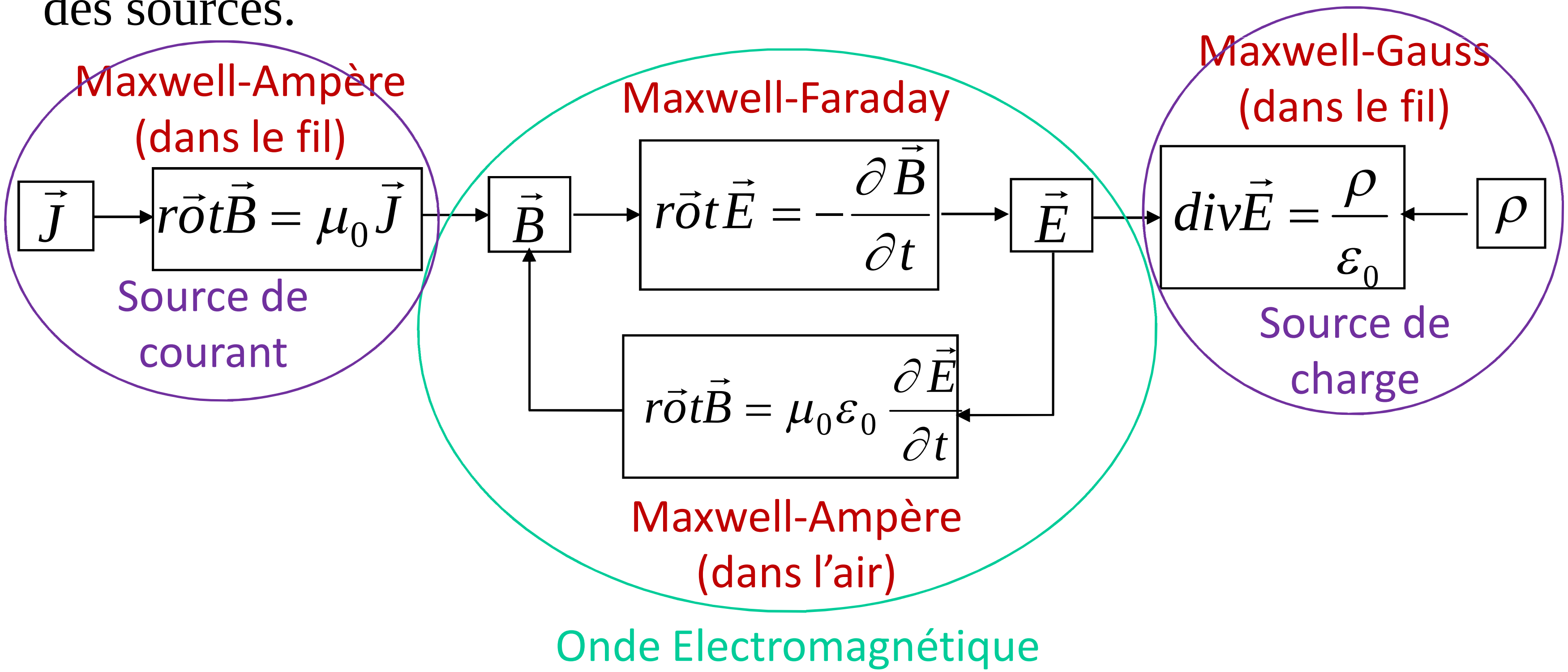
Ondes Electromagnétiques – Généralisation

- Le champ électromagnétique acquiert une existante indépendante des charges et des courants.
- Initialement il est nécessaire d'avoir des charges ou des courants pour créer une onde électromagnétique.
- A partir du moment où l'onde est émise, son existence ne dépend plus des sources.



Ondes Electromagnétiques – Généralisation

- Le champ électromagnétique acquiert une existante indépendante des charges et des courants.
- Initialement il est nécessaire d'avoir des charges ou des courants pour créer une onde électromagnétique.
- A partir du moment où l'onde est émise, son existence ne dépend plus des sources.



Remerciement

Merci de votre attention !