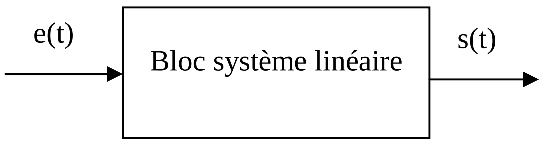
CHAP.VIII : FILTRES ELECTRIQUES PASSIFS

1. INTRODUCTION :

L'impédance de certains éléments de base de l'électrocinétique (capacité et bobine) est variable avec la pulsation de la source d'alimentation. Cette propriété est utilisée dans les fonctions électroniques où interviennent des signaux à fréquence variable.

Un circuit linéaire soumis à une grandeur d'entrée pour délivrer une grandeur de sortie est décrit par sa transmittance. Elle traduit le rapport entre la grandeur de sortie et celle d'entrée. En régime sinusoïdal, c'est une fonction complexe dont l'étude permet de décrire les propriétés du circuit associé. L'étude se traduit par un ensemble de graphes, les diagrammes de Bode, décrivant l'évolution du module et la phase lorsque la pulsation de la grandeur d'entrée est variable.

Un circuit linéaire est assimilé à un bloc soumis au signal d'entrée e(t) pour délivrer un signal s(t) en sortie. C'est la nature linéaire du circuit qui transforme l'entrée sinusoïdale de pulsation ω en sortie sinusoïdale de même pulsation.



La sortie du système est liée à l'entrée par une équation différentielle :

$$a_n \frac{\partial^n s(t)}{\partial t^n} + \cdots + a_1 \frac{\partial s(t)}{\partial t} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

En régime sinusoïdal permanent : $\begin{cases} e(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1) \\ s(t) = S\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e(t) = E\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi_1)} \\ s(t) = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi_2)} \end{cases}$

$$a_n (j\omega)^n s(t) + \cdots + a_1 (j\omega) s(t) + a_0 s(t) = b_0 e(t) \quad \Rightarrow \boxed{h(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{b_0}{a_n (j\omega)^n + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0}}$$

$$h(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi} \quad \Rightarrow \begin{cases} H(\omega) = \dfrac{S}{E} = \left\| \dfrac{b_0}{a_n (j\omega)^n + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0} \right\| \\ \varphi(\omega) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg\left(\dfrac{b_0}{a_n (j\omega)^n + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0} \right) \end{cases}$$

$h(j\omega)$ est la fonction de transfert complexe que ce soit en tension ou en courant dont le module est $H(\omega)$ et la phase est $\varphi(\omega)$.

Pour l'étude, les grandeurs seront considérées sinusoïdales et de même fréquence. Si elles ne l'étaient pas, une étude superposée des fonctions sinusoïdales issues de la décomposition en série de Fourier pourrait être envisagée.

2. LE DECIBEL :

a. Gain en puissance :

Dans le but de calculer le rapport des puissances (p_2/p_1), on définit le logarithme décimal de ce rapport. On obtient alors des Bels : $\text{Log}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$.

L'unité la plus employée est un **sur-multiple du Bel** : **Décibel (dB)**, c'est-à-dire : $10\text{Log}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$, donc :

- Le gain en puissance est donné par : $\left[10\text{Log}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]_{dB}$

b. Gain en tension ou en courant :

Si nous intéressant au calcul des courants et des tensions :

$$\begin{cases} P_1 = RI_1^2 = \dfrac{V_1^2}{R} \\ P_2 = RI_2^2 = \dfrac{V_2^2}{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} 10\log\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right) = 10\text{Log}\left(\dfrac{I_2}{I_1}\right)^2 = 20\text{Log}\left(\dfrac{I_2}{I_1}\right) \\ 10\log\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right) = 10\text{Log}\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^2 = 20\text{Log}\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) \end{cases}$$

Donc le rapport de deux courants ou de deux tensions s'exprime en Décibels :

- Gain en tension par : $\left[20\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right]_{dB}$
- Gain en courant par : $\left[20\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)\right]_{dB}$

et on trace ces fonctions dans l'échelle logarithmique.

c. Valeurs particulières :

$H(\omega) = 1 \Rightarrow H(\omega)_{dB} = 0$	$H = 10 \Rightarrow H_{dB} = 20dB$	$H = 0.1 \Rightarrow H_{dB} = -20dB$
$H(\omega) = \sqrt{2} \Rightarrow H(\omega)_{dB} = 3dB$	$H = 10^2 \Rightarrow H_{dB} = 40dB$	$H = 10^{-2} \Rightarrow H_{dB} = -40dB$
$H(\omega) = 1/\sqrt{2} \Rightarrow H(\omega)_{dB} = -3dB$	$H(\omega) = 10^3 \Rightarrow H_{dB} = 60dB$	$H = 10^{-3} \Rightarrow H_{dB} = -60dB$

En conclusion toute multiplication (par exemple par $\sqrt{2}$) correspond à augmentation (de 3dB) et inversement toutes division (par $\sqrt{2}$) correspond en Décibel à une diminution (de 3 dB).

d. Intérêt du Décibels

- Les gains sont souvent plus petits et l'utilisation des Décibels permet de manipuler des nombres plus grands.

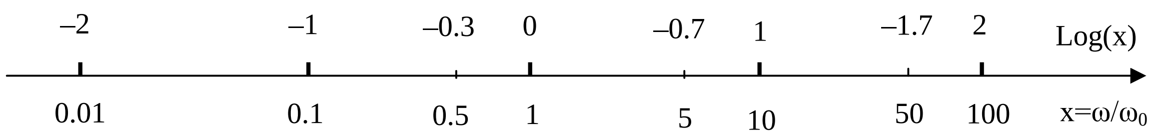
- Soit deux étage en cascade : $H_1(\omega) = V_2/V_1$ et $H_2(\omega) = V_3/V_2$

  Le gain total est $H(\omega) = \dfrac{V_3}{V_1} = H_1(\omega)H_2(\omega)$

  Il correspond en Décibel à : $H(\omega) = H_{1dB}(\omega) + H_{2dB}(\omega)$

  Donc tout produit de fonctions de transfert correspond en décibel en une somme.

3. UNITE LOGARITHMIQUE :



On désigne sous le nom d'Octave à un doublement de fréquence et une décade à une multiplication par 10.

Intérêt de l'échelle logarithmique :

La bande des fréquences étant très large on utilise alors une échelle logarithmique qui réduit cette bande.

Exemple : $f = 1MHz = 10^6\,Hz \Rightarrow Log(f) = 6$

4. DEFINITIONS DES FREQUENCES PARTICULIERES :

Fréquence de résonance noté f_0 :

a) Pour les circuits passifs, iIl s'agit d'une fréquence pour laquelle le signal d'entrée est transmis complètement à la sortie :

$$H(\omega_0) = \frac{S(\omega_0)}{E(\omega_0)} = 1 \quad \Rightarrow \quad S(\omega_0) = E(\omega_0)$$

b) Pour les circuits résonnants, il s'agit d'une fréquence pour laquelle le signal d'entrée est amplifié au maximum :

$$\left.\frac{dH(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad \text{(Circuit résonant)}$$

Fréquence de coupure noté fc :

C'est une fréquence qui sépare deux bandes successives de fréquences ou encore c'est une fréquence pour laquelle le gain maximum est divisé par $\sqrt{2}$, autrement dit : $H(\omega_c) = H_{max} / \sqrt{2}$.

Pour la calculer il suffit :

$$H(\omega = \omega_c) = H_{max} / \sqrt{2}$$
$$H(\omega = \omega_c) = 20\log(H_{max}) + 20\log(1/\sqrt{2}) = 20\log(H_{max}) - 3dB$$

Astuce de calcul des fonctions de transfert

Certaines fonctions de transfert s'expriment sous la forme d'un produit de fonctions du premier ordre apparaissant au numérateur ou au dénominateur) sous la forme suivante :

$h(j\omega) = \prod_i h_i(j\omega)$ avec les $h_i(j\omega)$ peuvent prendre les expressions : $h(jx) = A$; $h(jx) = 1 + j\omega/\omega_0$ ou $h(jx) = 1 + j\omega/\omega_0$ ou leurs inverses.

Il est plus pratique d'étudier une telle fonction en fractionnant l'étude sur chaque fonction hi. Le gain

$|H(j\omega)|$ est le produit des gains $|H_i|$ et la phase arg(h) est la somme des phases arg(H_i).

Le tracé de Bode en gain est logarithmique : le tracé du gain global est obtenu en additionnant les gains partiels (les gains en décibels). Pour la phase globale, on ajoute les phases partielles.

$$\begin{cases} H_{dB} = H_{1dB} + H_{2dB} + \cdots + H_{NidB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_N \end{cases}$$

5. DIAGRAMMES DE BODE

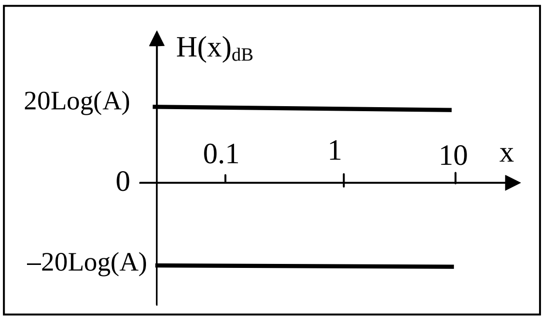
1- Pourquoi le diagramme de Bode :

- Le fait que la gamme de fréquences, appliquées aux systèmes électriques, est très larges, on utilise pour l'axe des fréquences, lors des tracés des fonctions de transfert, une échelle logarithmique.
- Si un système admet une fréquence caractéristiques, l'axes des abscisses est représenter par des valeurs des fréquences ou des pulsations réduites en échelle logarithmique Log(x), telles que :
  - Si la fréquence de résonance f_0 existe, on pose $x = f/f_0 = \omega/\omega_0$
  - Si non on prend la fréquence de coupure f_c et on pose $x = f/f_c = \omega/\omega_c$
- Le fait que les gains sont très faible, on utilise sur l'axe des ordonnées une échelle en décibels, telle que : $H(x)_{dB} = 20\log[H(x)]$
- Le tracé rigoureux d'une fonction de transfert est souvent une opération embêtante, dans de nombreux cas une représentation approximative est suffisante. Les courbes en générales sont tracées sous leur forme asymptotique.
- On peut à partir d'un tracé d'un diagramme de Bode, retrouver l'expression la fonction de transfert en chassant que la fonction de transfert en Décibel est la somme des fonctions élémentaires.

2- Fonctions de transfert élémentaires :

a- Une constante :

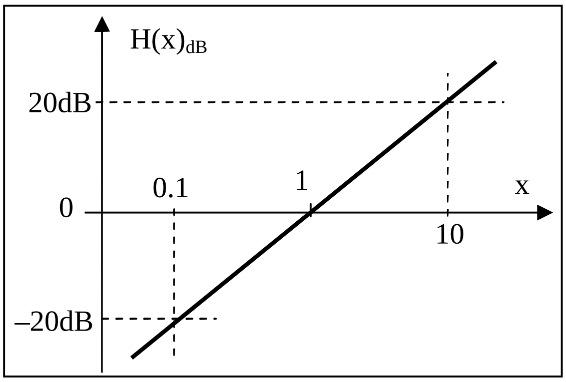
Considérant une constante supérieure à 1



- $h(x) = A \Rightarrow H_{dB} = 20Log(A)$
- $h(x) = 1/A \Rightarrow H_{dB} = -20Log(A)$

b- Rampe :

C'est la plus simple des fonctions de transfert de premier ordre, dont sa forme complexe est : $h(x) = jx$. Son module est $H(x) = x$. Son module en décibel est : $\boxed{H_{dB} = 20Log(x)}$



Pour x = 1 $\Rightarrow H_{dB} = 0$

Pour x = 10 $\Rightarrow H_{dB} = 20$ dB

Pour x = 0.1 $\Rightarrow H_{dB} = -20$ dB

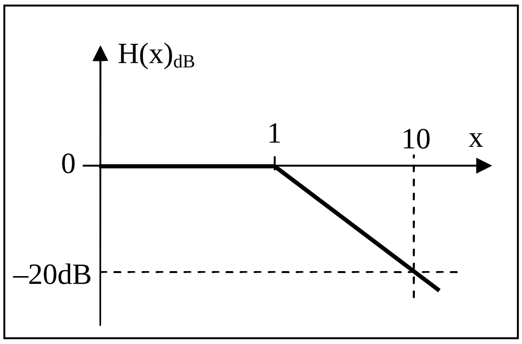
Son diagramme de Bode est une droite dont la pente est de 20dB par décade (20 dB/décade).

c- Foction de premier ordre :

$h(jx) = \dfrac{1}{1 + jx}$, son module en décibel est :

$$H_{dB} = 20Log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\boxed{H_{dB} = -10Log\left(1+x^2\right)}$$



Pour x << 1 $\Rightarrow H_{dB} = 20Log(1) = 0$

Pour x >> 1 $\Rightarrow H_{dB} = -10Log\left(x^2\right) = -20Log(x) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow H_{dB} = 0 \\ x = 10 \Rightarrow H_{dB} = -20\,dB \end{cases}$

Son diagramme de Bode est divisé en deux ; pour x << 1 est l'axe des abscisses et pour x>>1 c'est une droite dont la pente est de –20dB par décade (20 dB/décade).

B. Maouche

Exemple

On considère le diagramme asymptotique suivant :

$$\boxed{H_{dB} = A\frac{1}{1+j\omega\tau_1}\frac{1}{1+j\omega\tau_2}}$$

$$H_{dB} = 2+\frac{1}{1+j\omega 10^{-2}}\frac{1}{1+j\omega 10^{-3}} \Rightarrow$$

$$\boxed{H_{dB} = 2+\frac{10^2}{10^2+j\omega}\frac{10^3}{10^3+j\omega 10^{-3}}}$$