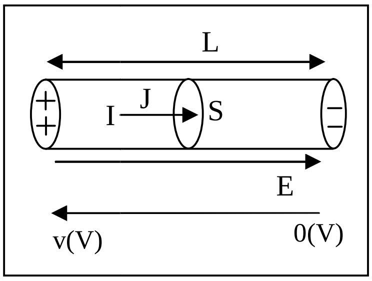
SOLUTION DES TRAVAUX DIRIGES
UEF 21 (CEM)

EXO.1

1. Expression de la résistance d'un conducteur filiforme :



Portion d'un conducteur

- Loi d'Ohm : $\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\sigma} \Rightarrow E = \rho J$ (1)
- Loi d'induction spatiale : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E = -\dfrac{dV}{dl}$

$$E = -\frac{0 - v}{L} \Rightarrow E = \frac{v}{L} \quad (2)$$

- Densité de courant : $I = \vec{J} \cdot \vec{S} \Rightarrow J = \dfrac{I}{S}$ (3)
- En combinant les relations (1), (2) et (3) on arrive à : $v = \rho \dfrac{L}{S} i$

La différence de potentiel entre deux points d'un conducteur est proportionnelle au courant qui le traverse. La constante de proportionnalité est la résistance R de ce conducteur.

$$\mathrm{v} = \mathrm{R\ i} \Rightarrow R = \rho \frac{L}{S} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

où : $\rho[\Omega m]$: résistivité électrique,

$\sigma[(\Omega m)^{-1}]$: Conductivité électrique,

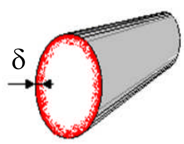
l[m] : longueur du fil,

S[m^2] : section du fil.

Pour le cuivre (σ = 5,7 10^7 $[\Omega/m]^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$[H/m]) :

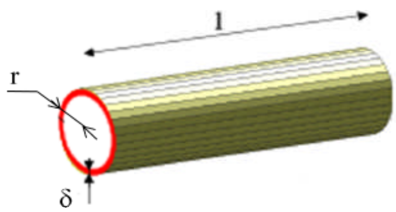
2. Résistance en fonction de l'épaisseur de peau électromagnétique :

L'épaisseur de peau électromagnétique est donnée par : $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\sigma\pi f}}$



L'épaisseur de peau diminue avec la racine carrée de la fréquence, avec la conductivité et la perméabilité.

La section totale du conducteur est : $S = \pi r^2 \Rightarrow R = R_{DC} = \dfrac{1}{\sigma} \dfrac{l}{\pi r^2}$



$$S_\delta = \pi\left[r^2 - (r - \delta)\right]^2 = \pi\delta(2r - \delta) \quad \text{et} \quad R_\delta = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S_\delta}$$

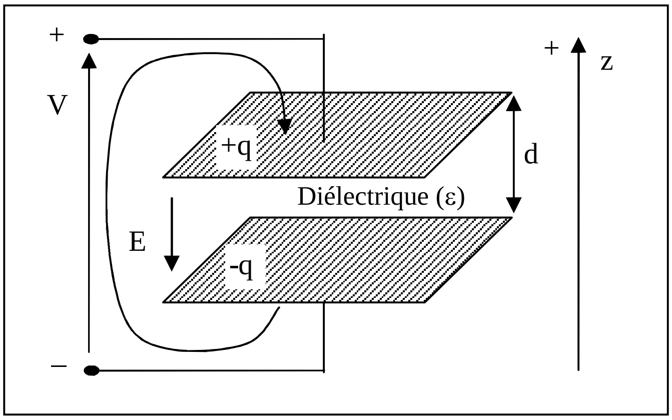
Soit d=2r, le diamètre de la section, la résistance devient : $R_\delta = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{l}{\pi\delta(2r-\delta)} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{l}{\pi\delta(d-\delta)}$

- Pour δ > d $\Rightarrow R_\delta = R_{DC}$
- Pour δ << d $\Rightarrow R_\delta = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{l}{\pi\delta\, d}$

Pour f→∝ ⇒ δ→0 ⇒ R→∝ : En théorie, il n'y a pas de courant qui circule dans les conducteurs pour les fréquences entrainement élevées. En pratique, c'est un courant qui circule sur la surface de séparation entre la conducteur et l'air ; c'est le cas des fibres optiques.

EXO.2 :

1. Expression de la capacité d'un condensateur :



Loi de Gauss : $divE = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow$ sur une seule direction : $\dfrac{dE}{dz} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow E = \dfrac{\rho}{\varepsilon} d$ (1)

Densité de charge volumique : $\rho = \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{q}{\tau}$ avec $\tau = Sdz = Sd \Rightarrow \rho = \dfrac{q}{Sd}$ (2)

(1) et (2) on arrive à : $E = \dfrac{q}{\varepsilon S}$

or $E = \dfrac{V}{d}$ donc $\dfrac{V}{d} = \dfrac{q}{\varepsilon S} \Rightarrow V = \dfrac{d}{\varepsilon S} q \Rightarrow q = \dfrac{\varepsilon S}{d} V$

Les charges électriques transférées entre deux points sont proportionnelles à la différence de potentiel de ces points. Le coefficient de proportionnalité est la capacité C du système.

$$q = CV \Rightarrow C = \frac{\varepsilon S}{d} [F]$$

C : Constante de proportionnalité = capacité du condensateur.

Unité de capacité : Farad (F) ou de façon plus pratique : Microfarad ($1\mu F = 10^{-6} F$) ou Nanofarad ($1\mu F = 10^{-9} F$) Picofarad ($1pF = 10^{-12} F$).

- N'importe quelle paire de fils est un condensateur, il faut donc prendre des précautions lorsque l'on réalise des circuits électroniques (capacité parasite).

- Le diélectrique peut être : de l'air, du papier ciré, du polystyrène, du mica, du verre, de la céramique,...

2. Relations entre courant et tension du condensateur :

- ***Régime quelconque :***

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \text{ or } q(t)=C\,v(t) \text{ donc } i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$dv=\frac{1}{C}i(t)dt \quad \Rightarrow v(t)=\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

- ***En régime continu : fréquence=0 ou v(t)=constante :***

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}\Rightarrow i(t)=0$$

- ***Régime harmonique (sinusoïdal et en notation complexe)***

$$I = jC\omega V \Rightarrow V=\frac{I}{jC\omega}=-j\frac{I}{C\omega}$$

- A hautes fréquences (f>>) : $V\to 0$
- A basses fréquences (f<<): $I\to 0$

3. Expressions de la puissance et de l'énergie stockée.

La puissance instantanée est : $p(t)=v(t)\,i(t)$ or $i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$ donc $p(t)=C\,v(t)\frac{dv(t)}{dt}$

L'énergie stockée dans le condensateur entre les temps t_0 et t vaut : $W_C=\int_{t_0}^{t} p(t)dt$

$$W_C=\int_{t_0}^{t} C\,v\frac{dv}{dt}dt \qquad \Rightarrow W_C=C\int_{t_0}^{t} v(t)\,dv \Rightarrow W_C=\frac{1}{2}C\,v^2(t)\Big|_{t_0}^{t}$$

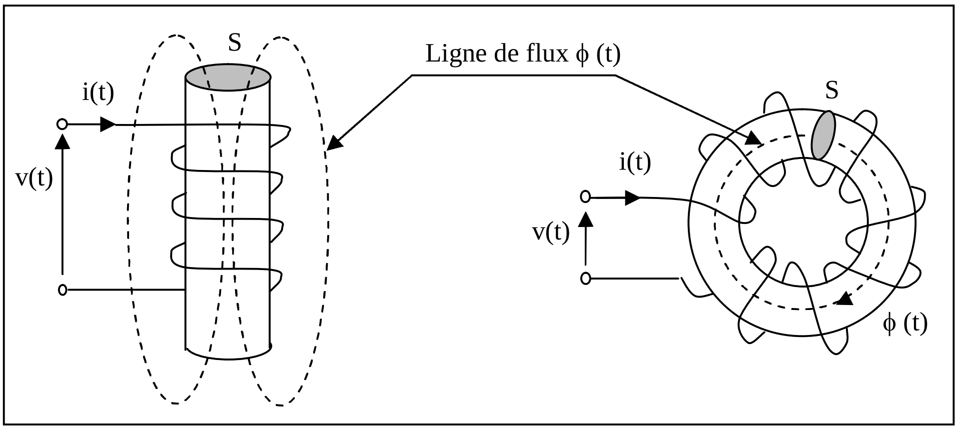
Si à t = t_0, $W(t_0)$ = 0, il vient : $W_C(t)=\frac{1}{2}C\,v^2(t)\,[Joule]$

EXO.3 :

1. Expression de l'inductance d'une bobine :

La bobine est un enroulement de fil pouvant être de plusieurs couches et caractérisée par le matériau sur lequel le fil est enroulé :

- Air, matériau magnétique (TV, radio, filtres).
- Matériau ferromagnétique (filtre, source de tension, transformateur).



Loi d'Ampère : $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{NI}{l}$

Relation magnétique : $B = \mu H \;\Rightarrow\; B = \mu \frac{NI}{l}$

Flux magnétique créé par les N spires : $\phi = NBS \qquad \Rightarrow \quad \phi = N^2 \mu \frac{S}{l} I$

Le flux magnétique créé par une bobine est proportionnel au courant qui l'a traverse et le coefficient de proportionnalité est l'inductance L de cette bobine.

$N\phi = Li$ (Weber [Wb]) $\Rightarrow$ $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$ (Henry [H])

2. Relations entre tension et courant de la bobine :

- ***Régimes quelconque***

Loi d'induction de Faraday : $v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$ or $\phi(t) = L\, i(t)$

On exprime ainsi, la tension en fonction du courant : $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

Le courant en fonction de la tension est : $i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$

- ***En régime continu : fréquence =0 ou i(t)=constante***

$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = 0$

- ***Régime harmonique (sinusoïdal et en notation complexe)***

$V = jL\omega I \Rightarrow I = \frac{V}{jL\omega} = -j\frac{V}{L\omega}$

- A hautes fréquences (f>>) : $I \to 0$
- A basses fréquences (f<<) ou en continu (i(t)=cte): $V \to 0$

3. Expressions de la puissance et de l'énergie stockée.

La puissance instantanée est : $p(t) = v(t)\, i(t)$ or $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ donc $p(t) = L\, i(t)\frac{di(t)}{dt}$

L'énergie stockée dans la bobine entre les temps t_0 et t vaut : $W_L = \int_{t_0}^{t} p(t)dt$

$$W_L = \int_{t_0}^{t} L\, i(t)\frac{di(t)}{dt}dt \quad \Rightarrow \quad W_L = L\int_{t_0}^{t} i(t)di \quad \Rightarrow \quad W_L = \frac{1}{2}L i^2(t)\Big|_{t_0}^{t}$$

Si à t = t_0, *W(t_0) = 0*, il vient : $W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)\,[Joules]$

EXO.4 :

1. Comparaison entres les différents composants R, L et C et leurs rôles.

Résistances	**Condensateurs**	**Bobines**
V=RI	Q=CV	ϕ=LI
Liaison tension-courant	Liaison charges-tension	Liaison flux-courant
I=V/R	dV/dt=I/C	dI/dt=V/L
Elle freine l'intensité du courant	Freine la variation de la tension	Freine la variation du courant
Limitation du courant électrique	Stabilisation de la tension	Lissage du courant

2. Expliciter les dualités entre L et C.

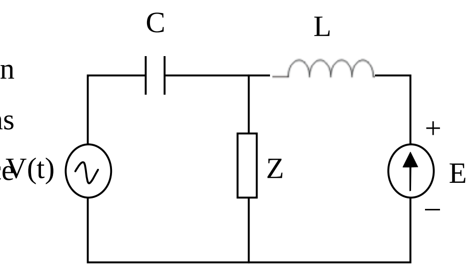
Condensateur	**Bobine**
$i=-\dfrac{dq}{dt}$	$V=-\dfrac{d\phi}{dt}$
$q = CV$	$\phi = LI$
$i=C\dfrac{dv}{dt}$	$v=L\dfrac{di}{dt}$
$I = jC\omega V$	$V = jL\omega I$
$W_C(t)=\dfrac{1}{2}Cv^2(t)\,[\text{Joules}]$	$W_L(t)=\dfrac{1}{2}Li^2(t)\,[\text{Joules}]$

Si on remplace v par i et L par C, on constate que ces équations sont identiques. En fait, de façon générale, on a les quantités duales suivantes :

CONDENSATEUR	**BOBINE**
Capacité	Inductance
Charge électrique	Flux magnétique
Tension	Courant
Circuit ouvert (DC)	Circuit fermé (DC)
Circuit fermé (AC-HF)	Circuit ouvert (AC-HF)
Série	Parallèle
Parallèle	Série

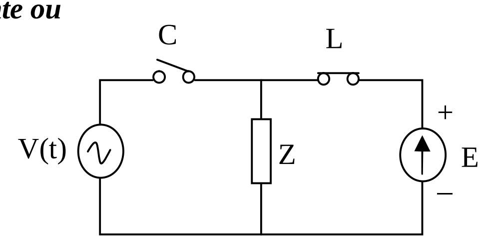
EXO. 5 :

La figure ci-contre montre comment il faut brancher un condensateur et une bobine pour faire cohabiter sans perturbation une source continue avec une source alternative de haute fréquence.



❖ ***Contribution de la source continue (tension constante ou fréquence nulle) :***

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt} = jC\omega V_C \Rightarrow I_C = 0 \quad : \textit{Circuit ouvert}$$

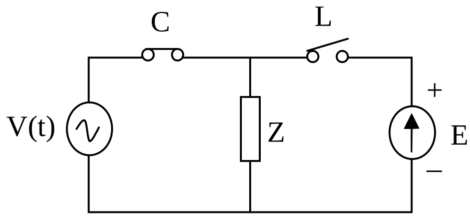


$$V_L = L\frac{dI_L}{dt} = jL\omega I_L \Rightarrow V_L = 0 \quad : Circuit\ \ fermé$$

❖ ***Contribution de la source alternative HF (tension constante ou fréquence nulle) :***

$$V_C = \frac{I_C}{jC\omega} \Rightarrow V_C = 0 \quad : Circuit\ \ fermé$$

$$I_L = \frac{V_L}{jL\omega} \Rightarrow I_L = 0 \quad : Circuit\ ouvert$$



EXO.6

1. Exprimer en dB le rapport entre les tensions U_1 = 15 V et U_2 = 30 mV et celui de leur rapport inverse.

$$\left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = 20\log\left(\frac{15}{30}\right) = 20\log(0.5) = -20\cdot 0.3 = -6\,dB$$

$$\left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = 20\log\left(\frac{30}{15}\right) = 20\log 2 = 20\cdot 0.3 = 6\,dB$$

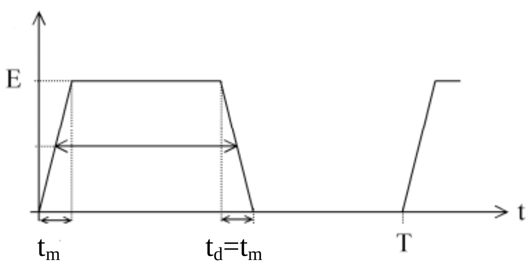
2. Un filtre produit une atténuation de 46 dB. Quelle est sa tension de sortie lorsque l'entrée est alimentée à 100 mV ?

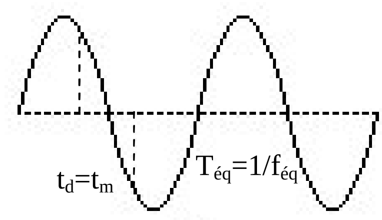
$\left.\frac{U_S}{U_e}\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{U_S}{U_e}\right) = -46\,dB$; Signe moins (–) c'est parce qu'il s'agit d'une atténuation. Si c'est c'était une amplification on mettra un signe plus (+).

$$\log\left(\frac{U_S}{U_e}\right) = -\frac{46}{20} = -2.3 \Rightarrow \frac{U_S}{U_e} = e^{-2.3} \Rightarrow U_S = U_e e^{-2.3} = 100e^{-2.3} = 0.5mV$$

EXO. 7 :

La tension fournie par un variateur à un moteur est carrée à 10kHz. Lors de la commutation, la tension passe de 0 à 600 V en 60 ns. Quelle est la fréquence équivalente à ces sauts de tension ?

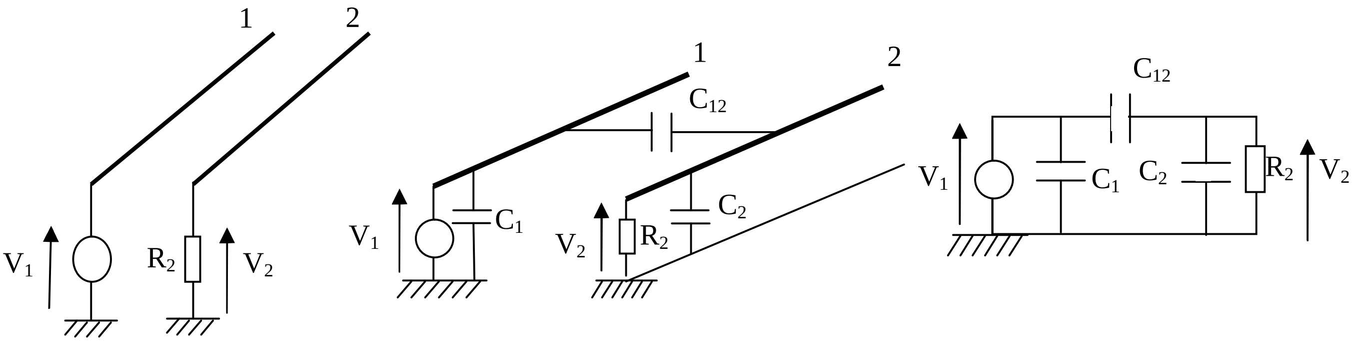




$$T_{éq} = 3t_m \Rightarrow f_{éq} = \frac{1}{T_{éq}} = \frac{1}{3t_m}$$

EXO. 8 :

1. Schéma équivalent :



2. Expression du rapport des tensions :

$$Z_2=\frac{R_2\dfrac{1}{jC_2\omega}}{R_2+\dfrac{1}{jC_2\omega}}=\frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}\Rightarrow\frac{V_2}{V_1}=\frac{Z_2}{Z_2+\dfrac{1}{jC_{12}\omega}}=\frac{\dfrac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}}{\dfrac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}+\dfrac{1}{jC_{12}\omega}}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{R_2}{R_2+\dfrac{1+jR_2C_2\omega}{jC_{12}\omega}}=\frac{R_2}{\dfrac{1+jR_2C_{12}\omega+jR_2C_2\omega}{jC_{12}\omega}}=\frac{jR_2C_{12}\omega}{1+jR_2C_{12}\omega+jR_2C_2\omega}$$

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1}=\frac{jR_2C_{12}\omega}{1+jR_2(C_{12}+C_2)\omega}}$$

a. **Domaine des basses fréquences f<< (f→0):** $f<<\ (f\to 0)\Rightarrow\frac{V_2}{V_1}=0\Rightarrow V_2=0$

Conclusion : Pas de perturbation en basse fréquence

b. **Domaine des hautes fréquences f>> (f→∞0):** $f<<\ (f\to\infty)\Rightarrow\frac{V_2}{V_1}=\frac{C_{12}}{C_{12}+C_2}=\frac{1}{1+\dfrac{C_2}{C_{12}}}$

Conclusion : *Pour avoir* $V_2<<$ *, il faut que* $\frac{C_2}{C_{12}}>>\Rightarrow C_{12}>>$ *donc il faut éloigner les câbles*

EXO.9

Soit un coup de foudre dont la tension maximale au point d'impact est de 300kV. On considère le point d'impact comme origine des abscisses. La tension décroît exponentiellement en fonction de la distance x par la fonction suivante : $V(x)=300\,e^{-0.022x}kV$

1. Expression du champ électrique :

$$E(x)=-gradV(x)=-\frac{dV(x)}{dx}=\frac{300}{45.5}e^{-0.022x}\Rightarrow E(x)=6.6e^{-0.022x}kV/m$$

2. **Une personne se promène à 100m du point d'impact de la foudre en faisant des enjambées de 100cm. Calculer la différence de potentiel auquel est soumis le promeneur.**

$$\begin{cases} x = 160m \Rightarrow 300\,e^{-0.022\cdot 160} = 8.88kV \\ x = 160{,}8m \Rightarrow 300\,e^{-0.022\cdot 160{,}8} = 8.72kV \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160m \\ \Delta x = 0.8m \end{cases} \Rightarrow \Delta V = 8.88 - 8.72 = 160V$$

La vie de la personne est en danger car elle est soumise à une ddp de 160V surtout en temps humide.

3. **Si cette personne se promène à la même distance du point d'impact (x=100m) mais en faisant des enjambées de 20cm. Calculer à nouveau la différence de potentiel auquel est soumis le promeneur.**

$$\begin{cases} x = 160m \Rightarrow 300\,e^{-0.022\cdot 160} = 8.88kV \\ x = 160{,}2m \Rightarrow 300\,e^{-0.022\cdot 160{,}8} = 8.84kV \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160m \\ \Delta x = 0.2m \end{cases} \Rightarrow \Delta V = 8.88 - 8.84 = 40V$$

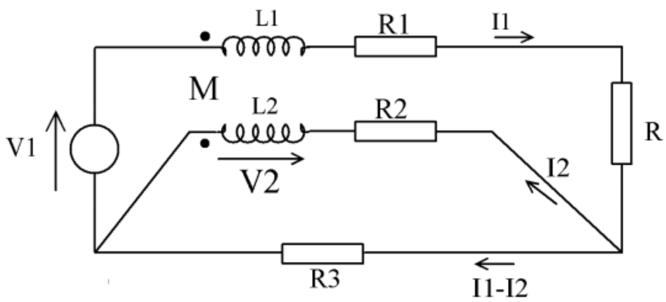
La vie de la personne n'est pas en danger car elle est soumise à une ddp de 40V même si en temps humide.

4. **Que remarquer-vous et que préconisez-vous (conseil à donner) à toute personne se trouvant dans cette situation?**

Il faut impérativement rester les pieds groupés au sol ou se mettre sur un seul pied en attendant que l'orage passe.

EXO.10

1. **Schémas équivalent :**



2. **Tension induite dans le blindage :**

$$V_2 = jL\omega I_2 - jM\omega I_1$$

3. **Le rapport du courant du blindage sur celui de l'âme.**

Considérant la maille formée par le blindage et le plan de masse : $V_2 + R_2 I_2 = R_3(I_1 - I_2)$

Avec $V_2 = jL_2\omega I_2 - jM\omega I_1 \Rightarrow (R_2 + R_3)I_2 + jL_2\omega I_2 = R_3 I_1 + jM\omega I_1 \Rightarrow (R_2 + R_3 + jL_2\omega)I_2 = (R_3 + jM\omega)I_1$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_3 + jM\omega}{R_2 + R_3 + jL_2\omega} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}\frac{1 + j\dfrac{M\omega}{R_3}}{1 + j\dfrac{L_2\omega}{R_2 + R_3}}$$

4. **Déduire l'expression de ce rapport dans les domaines de basses fréquences et des hautes fréquences.**

   c. **Domaine des basses fréquences :**

$$f << \; (f \rightarrow 0) \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

Or la résistance R_3 de la masse est presque nulle $(R_3 = 0)$, on en déduit que : $I_2 = 0 \; et \; I_3 = I_1$

d. Domaine des hautes fréquences :

$$f >> \; (f \rightarrow \infty) \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{M}{L_2}$$

Or dans un câble blindé la mutuelle en la blindage et l'âme est égale à l'inductance propre au blindage : $M = L_2$, on en déduit que : $I_2 = I_1 \Rightarrow I_3 = 0$

Conclure :

Le blindage intervient dans le domaine des hautes fréquences.