Université A.Mira
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Premiere année L.M.D

25 Mai 2014

Examen de Maths2.
Durée (2 heures)

Exercice 1. (**9pts**) Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un paramètre réel.

1) Calculer le déterminant de M. $(\alpha-1)(1-\alpha^2) = -\alpha^3+\alpha^2+\alpha-1$

2) Déduire les valeurs de α pour que M soit inversible et calculer dans ce cas M^{-1}. $\alpha \in \mathbb{R}-\{1,-1\}$

3) Posons $\alpha = 0$, résoudre de deux façons différentes dans $\mathbb{R}^3$, le système $MX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) Discuter et résoudre suivant les valeurs de m le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = m. \end{cases}$$

$m = 1$ infinité de solutions
$m \neq 1$ pas de solution.

5) Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2 et montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $A^2 = \lambda A$. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$

b) Calculer A^k, où $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. $A^k = 3^k A$

Exercice 2. (**7pts**) Soit l'application f suivante :

$\det M_f = -2.$

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = (2x + y + z,\ y + z,\ x + y)$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.
2) Déterminer M_f, la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $B = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3) Vérifier que M_f est inversible et calculer M_f^{-1}.
4) Déduire l'expression de f^{-1}, application inverse de f.
5) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $B' = \{a = e_1 + e_2,\ b = e_1 + e_3,\ c = e_2 + e_3\}$.

$M_f^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

$f(a) = (3,1,2) = 1a + 2b + 0c$
$f(b) = (3,1,1) = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c$
$f(c) = (2,2,1) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

$M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 3. (**4pts**) Considérons la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $C^3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, où $0_{\mathbb{R}^3}$ est la matrice nulle d'ordre 3.
2) Calculer $(I_3 - C)(I_3 + C + C^2)$, où I_3 et la matrice identité d'ordre 3.
3) Montrer que la matrice $D = I_3 - C$ est inversible et calculer D^{-1}.

$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bon Courage

$(I-C)(I+C+C^2) = I$ 3) $D(I+C+C^2) = I$ $D^{-1} = I+C+C^2$

1

Exercice 01

1) Le déterminant de M.

$$\det M = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det M = (\alpha-1)(1-\alpha^2).$$

$$= -\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1$$

1

2) a) M est inversible $\Leftrightarrow \det M \neq 0.$

$$\Leftrightarrow (\alpha-1)(1-\alpha^2) \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \alpha \notin \{-1, 1\}.$$

Donc M est inversible $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$

0,5

b) La matrice inverse M^{-1}.

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot C_M^t .$$

on a : $C_M = \begin{pmatrix} (1-\alpha^2) & -(1+\alpha) & (\alpha+1) \\ -(1-\alpha) & \alpha & -(\alpha^2+\alpha+1) \\ (\alpha-1) & -(\alpha^2-\alpha-1) & (\alpha-2) \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \frac{1}{(\alpha-1)(1-\alpha^2)} \begin{pmatrix} (1-\alpha^2) & -(1-\alpha) & (\alpha-1) \\ -(1+\alpha) & \alpha & -(\alpha^2-\alpha-1) \\ (\alpha+1) & -(\alpha^2+\alpha+1) & (\alpha-2) \end{pmatrix}.$$

2

3) pour $\alpha = 0$, on a :

$$M_0 X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow X = M^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

1

2

b) En utilisant les formules de Cramer :

$\det M_0 = -1$.

$$x = \frac{\Delta x}{\det M_0} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$y = \frac{\Delta y}{\det M_0} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$z = \frac{\Delta z}{\det M_0} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1

4) La matrice $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ associée au (S')

La matrice extraite $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible $\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\right)$

Soit le sous système $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 + x_2 = 1 + x_3 \end{cases}$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{-3} = \frac{-\begin{vmatrix} 1-x_3 & 1 \\ 1+x_3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{1}{3}\left[1 - x_3 - 1 - x_3\right] = +\frac{2}{3}x_3$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{-3} = \frac{-\begin{vmatrix} -2 & 1-x_3 \\ 1 & 1+x_3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-1}{3}\left[-2 - 2x_3 - 1 + x_3\right] = \frac{1}{3}(3 + x_3)$$

1

On remplace x_1 et x_2 dans l'équation (e_3)

$(3) \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}(3 + x_3) + x_3 = m$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x_3 - 1 - \frac{1}{3}x_3 + x_3 = m$

$\Leftrightarrow -1 = m.$

. Donc pour $m = -1$ le système (S') admet une infinité de solution

. Donc pour $m \neq -1$ le système (S) n'admet pas de solution.

5) a) on a : $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3.A$

0,5

0,5

3

b) Montrons par récurrence que $A^k = 3^{k-1}.A$.

. c'est vrai pour $k=2$ (d'après la question a)).

. supposons l'égalité est vraie pour $k \geq 2$,

on a $A^{k+1} = A^k.A = 3^{k-1}.A.A$

$= 3^{k-1}.A^2$

$A^{k+1} = 3^k.A$.

d'où le résultat.

1,5

Exercice N°2 (7pts) : $f(x,y,z) = (2x+y+z, y+z, x+y)$ — 4

1) Vérifions que f est une application linéaire :

Soient (x,y,z), (x',y',z') et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$*$ $f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z')$

$= (2(x+x')+(y+y')+(z+z'), (y+y')+(z+z'), (x+x')+(y+y'))$

$= (2x+y+z, y+z, x+y)+(2x'+y'+z', y'+z', x'+y') = f(x,y,z)+f(x',y',z')$

1,5

$*$ $f(\lambda(x,y,z)) = (2(\lambda x)+\lambda y+\lambda z, \lambda y+\lambda z, \lambda x+\lambda z) = \lambda f(x,y,z)$

2) Déterminons M_f la matrice de f relativement aux base Canonique de $\mathbb{R}^3$.

$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,0,1) = 2e_1+0e_2+1e_3$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1,1) = 1e_1+1e_2+1e_3$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,1,0) = 1e_1+1e_1+0e_3$

$$\boxed{M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

1

3) Vérifions que M_f inversible :

$$\det M = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(0-1)+0 = \boxed{-2}$$

0,5

$\det M = -2 \neq 0$ Donc M inversible

$*$ Calculons M_f^{-1} : $\quad M_f^{-1} = \dfrac{1}{\det M_f}(M_f^c)^t$

$$M_f^c = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1

$$M_f^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}}$$

4) Déduire l'expression de f^{-1}:

soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f^{-1}(x,y,z) = M_f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z \end{pmatrix}$$

1

Donc: $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}y + z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z\right)$

5) Déterminons M' la matrice associée à f relativement à la base

$B' = \{a = e_1 + e_2, b = e_1 + e_3, c = e_2 + e_3\}$

$a = e_1 + e_2 = (1,1,0)$, $b = e_1 + e_3 = (1,0,1)$, $c = e_2 + e_3 = (0,1,1)$

$f(a) = f(1,1,0) = (3,1,2) = \overset{?}{\alpha}(1,1,0) + \overset{?}{\beta}(1,0,1) + \overset{?}{\gamma}(0,1,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \cdots\cdots ① \\ \alpha + \gamma = 1 \cdots\cdots ② \\ \beta + \gamma = 2 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$② - ③ \Rightarrow \alpha - \beta = -1 \cdots ④$

$① + ④ \Longrightarrow 2\alpha = 2 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$

$\boxed{f(a) = 1a + 2b + 0 \cdot c}$

$f(b) = f(1,0,1) = (3,1,1) = \overset{?}{\alpha}(1,1,0) + \overset{?}{\beta}(1,0,1) + \overset{?}{\gamma}(0,1,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 & ① \\ \alpha + \gamma = 1 & ② \\ \beta + \gamma = 1 & ③ \end{cases}$$

$② - ③ \Longrightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

$① \Longrightarrow \alpha = \frac{3}{2} = \beta$

$\gamma = 1 - \beta \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{-1}{2}}$

$$\boxed{f(b) = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c}$$

$$f(c) = f(0,1,1) = (2,2,1) = \overset{?}{\alpha}(1,1,0) + \overset{?}{\beta}(1,0,1) + \overset{?}{\gamma}(0,1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \cdots (1) \\ \alpha + \gamma = 2 \cdots (2) \\ \beta + \gamma = 1 \cdots (3) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow \boxed{\beta = \gamma}$

$(3) \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \gamma = \frac{1}{2}$

$(1) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

$$\boxed{f(c) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c}$$

Donc : $$\boxed{M'_f = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

2

Exercice 3

1) on a $C^2 = C.C = \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -4 & -4 & -4\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$

et $C^3 = C^2 . C = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -4 & -4 & -4\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 1

2) $(I - C)(I + C + C^2) = I + \cancel{C} + \cancel{C^2} - C - C^2 - C^3 = I.$ 1

3) Soit $D = I - C$.

on a $D(I + C + C^2) = I$, donc D est inversible

et $D^{-1} = I + C + C^2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -2 & -5 & -6\\ 3 & 7 & 8\end{pmatrix}$. 2

Fin