

Examen de Maths2.
 Durée (2 heures)

Exercice 1. (9pts) Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un paramètre réel.

1) Calculer le déterminant de M .

2) Déduire les valeurs de α pour que M soit inversible et calculer dans ce cas M^{-1} .

3) Posons $\alpha = 0$, résoudre de deux façons différentes dans \mathbb{R}^3 , le système $MX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) Discuter et résoudre suivant les valeurs de m le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = m. \end{cases}$$

5) Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2 et montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $A^2 = \lambda A$.

b) Calculer A^k , où $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Exercice 2. (7pts) Soit l'application f suivante :

$$\det M_f = -2.$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = (2x + y + z, y + z, x + y)$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.

2) Déterminer M_f , la matrice associée à f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 , $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

3) Vérifier que M_f est inversible et calculer M_f^{-1} .

4) Déduire l'expression de f^{-1} , application inverse de f .

5) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $B' = \{a = e_1 + e_2, b = e_1 + e_3, c = e_2 + e_3\}$.

Exercice 3. (4pts) Considérons la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $C^3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, où $0_{\mathbb{R}^3}$ est la matrice nulle d'ordre 3.

2) Calculer $(I_3 - C)(I_3 + C + C^2)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

3) Montrer que la matrice $D = I_3 - C$ est inversible et calculer D^{-1} .

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C^2)(I_3 + C + C^2) = I_3$$

$$3)$$

$$D(I_3 + C + C^2)I_3$$

$$M_f^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Bon Courage

$$D^{-1} = I_3 + C + C^2$$

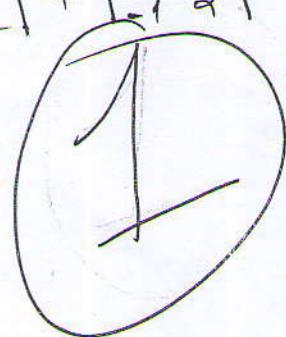
$$= \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 01

(1)

1) Le déterminant de M .

$$\det M = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix}$$



$$\Rightarrow \det M = (\alpha-1)(1-\alpha^2) \\ = -\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1$$

2) a) M est inversible $\Leftrightarrow \det M \neq 0$.

$$\Leftrightarrow (\alpha-1)(1-\alpha^2) \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \alpha \notin \{-1, 1\}.$$

Donc M est inversible $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

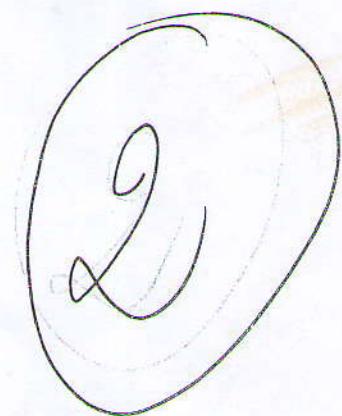


b) La matrice inverse M^{-1} .

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot C_M^t$$

$$\text{mais : } C_M = \begin{pmatrix} (1-\alpha^2) & -(1+\alpha) & (\alpha+1) \\ -(1-\alpha) & \alpha & -(\alpha^2+\alpha+1) \\ (\alpha-1) & -(\alpha^2-\alpha-1) & (\alpha-2) \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{(\alpha-1)(1-\alpha^2)} \begin{pmatrix} (1-\alpha^2) & -(1+\alpha) & (\alpha-1) \\ -(1+\alpha) & \alpha & -(\alpha^2-\alpha-1) \\ (\alpha+1) & -(\alpha^2+\alpha+1) & (\alpha-2) \end{pmatrix}$$



3) pour $\alpha = 0$, on a :

$$M_0 X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow X = M^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



b) En utilisant les formules de Cramer :

$$\det M_0 = -1.$$

$$x = \frac{\Delta x}{\det M_0} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{array} \right\}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\det M_0} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$z = \frac{\Delta z}{\det M_0} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

4) La matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ associée au (δ)

La matrice extraite $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ($\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$)

Soit le sous système

$$\begin{cases} -2u_1 + u_2 = 1 - u_3 \\ u_1 + u_2 = 1 + u_3 \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{\Delta x_1}{-3} = \frac{-1 - u_3 \quad 1}{1 + u_3 \quad 1} = -\frac{1}{3} [1 - x_3 - 1 - x_3] = +\frac{2}{3} u_3$$

$$u_2 = \frac{\Delta x_2}{-3} = \frac{-2 \quad 1 - u_3}{1 \quad 1 + u_3} = -\frac{1}{3} [-2 - 2u_3 - 1 + u_3] = \frac{1}{3} (3 + u_3)$$

on remplace u_1 et u_2 dans l'équation (03)

$$(3) \Leftrightarrow -\frac{2}{3} u_3 - \frac{1}{3} (3 + u_3) + u_3 = m$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} u_3 - 1 - \frac{1}{3} u_3 + u_3 = m$$

$$-1 = m.$$

\Leftrightarrow Donc pour $m = -1$ le système (δ') admet une infinité de solution

Donc pour $m \neq -1$ le système (δ) n'admet pas de solution.

(3)

5)  on a : $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$ 

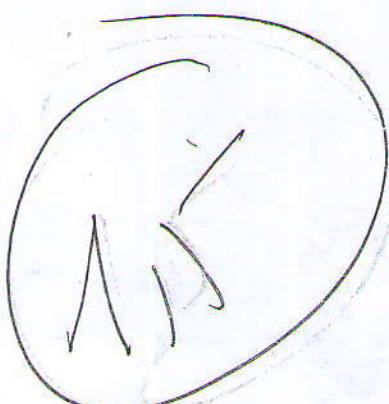
b) Montrons par récurrence que $A^k = 3^{k-1} \cdot A$.

c'est vrai pour $k=2$ (d'après la question a)).

Supposons l'égalité est vraie pour $k \geq 2$,

$$\text{on a } A^{k+1} = A^k \cdot A = 3^{k-1} \cdot A \cdot A = 3^{k-1} \cdot A^2 = 3^k \cdot A$$

d'où le résultat.



Exercice N°2 (7 pts) : $f(x, y, z) = (2x+y+z, y+z, x+y)$ - 4

1) Vérifions que f est une application linéaire :

Soient $(x, y, z), (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$* f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x+x', y+y', z+z') \\ = (2(x+x') + (y+y') + (z+z'), (y+y') + (z+z'), (x+x') + (y+y'))$$

$$= (2x+y+z, y+z, x+y) + (2x'+y'+z', y'+z', x'+y') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

$$* f(\lambda(x, y, z)) = (2(\lambda x) + \lambda y + \lambda z, \lambda y + \lambda z, \lambda x + \lambda z) \Rightarrow f(\lambda x, y, z)$$

2) Déterminons M_f la matrice de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 0, 1) = 2e_1 + 0e_2 + 1e_3$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 1, 1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 1, 0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Vérifions que M_f inversible :

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(0-1) + 0 = -2$$

$\det M = -2 \neq 0$ donc M inversible

* Calculons M_f^{-1} : $M_f^{-1} = \frac{1}{\det M} (M_f^c)^t$

$$M_f^c = \begin{pmatrix} +|1 1| & -|0 1| & +|0 1| \\ -|1 0| & +|2 1| & -|2 1| \\ +|1 0| & -|2 1| & +|2 1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

-5-

$$M_f^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}}$$

4) Déduire l'expression de f^{-1} :

soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f^{-1}(x, y, z) = M_f^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z \end{pmatrix}$$

Donc: $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z \right)$$

5) Déterminons M' la matrice associée à f relativement à la base

$$B' = \{a = e_1 + e_2, b = e_1 + e_3, c = e_2 + e_3\}$$

$$a = e_1 + e_2 = (1, 1, 0), \quad b = e_1 + e_3 = (1, 0, 1), \quad c = e_2 + e_3 = (0, 1, 1)$$

$$f(a) = f(1, 1, 0) = (3, 1, 2) = ?\alpha(1, 1, 0) + ?\beta(1, 0, 1) + ?\gamma(0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \dots \textcircled{1} \\ \alpha + \gamma = 1 \dots \textcircled{2} \\ \beta + \gamma = 2 \dots \textcircled{3} \end{cases} \quad \textcircled{2} - \textcircled{3} \Rightarrow \alpha - \beta = -1 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{4} \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

$$f(a) = 1a + 2b + 0.c$$

$$f(b) = f(1, 0, 1) = (3, 1, 1) = ?\alpha(1, 1, 0) + ?\beta(1, 0, 1) + ?\gamma(0, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha + \gamma = 1 \end{cases} \quad \textcircled{2} - \textcircled{3} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \\ \textcircled{2} \quad & \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha = \beta \end{cases} \quad \textcircled{1} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} = \beta \\ \textcircled{3} \quad & \Rightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \alpha = \beta \end{cases} \quad \gamma = 1 - \beta \Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

-6

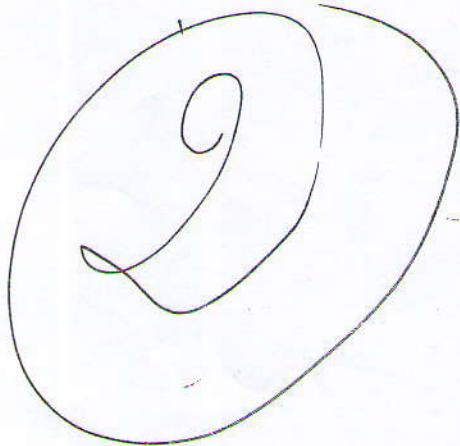
$$f(b) = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c$$

$$f(c) = f(0,1,1) = \alpha(1,1,1) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 & \text{(1)} \\ \alpha + \gamma = 2 & \text{(2)} \\ \beta + \gamma = 1 & \text{(3)} \end{cases}$$
$$\text{(2)} - \text{(1)} \Rightarrow \beta = 0$$
$$\text{(3)} \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$
$$\text{(1)} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

$$f(c) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

Dann:

$$M_f^1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



-7-

Exercice 3

$$1) \text{ on a } C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

et $C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$2) (I - C)(I + C + C^2) = I + A + C^2 - C - C^3 = I.$$

$$3) \text{ Soit } D = I - C.$$

on a $D(I + C + C^2) = I$, donc D est inversible.

et $D^{-1} = I + C + C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & -6 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

HIN