Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département ST1

Septembre 2012

Examen de rattrapage MATHS 2
Durée : 2 heures

Exercice n° 1. (5pts.) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et A_α la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par $A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de A_α. 1,5
2) Pour quelles valeurs de α, A_α est inversible. 0,5
3) Résoudre par la méthode de Cramer, le système linéaire (S) : $A_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1, 1, 1
$\frac{16}{-3}, \frac{8}{3}, \frac{25}{3}$

Exercice n° 2. (5pts)
On considère les matrices à coefficients constants P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{4}(I_3 + P)$$

0,5 0,5 0,5
1) Calculer P^2, PQ et QP.
2) Déduire que $P^3 = 3PQ^3P$. 1,5
3) Calculer $(4I_3 - P)Q$ 0,5 et $Q(4I_3 - P)$ 0,5. Que peut-ont conclure sur la matrice Q? 0,5
4) Calculer Q^{-1} (matrice inverse de Q). 0,5

Exercice n° 3. (5pts)
1) Déterminer les réels a et b tel que $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$ 0,5 $a = -1, b = 1$
2) Calculer l'intégrale indéfini 1 $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$. Déduire la valeur de l'intégrale défini $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx$. 0,5
3) Par un changement de variable convenable calculer : $x = \sin t$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos t}{6 - 5\sin t + \sin^2 t}dt \qquad 1$$

4) Soit $x \in]3, +\infty[$, résoudre l'équation différentielle linéaire de premier ordre suivante :

$$y' + \frac{1}{x^2-5x+6}y = \frac{x-3}{x^2-5x+6} \qquad 1, 1$$

__Indication__ : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*$, $\ln|\frac{a}{b}| = \ln|a| - \ln|b|$

Exercice n° 4. (5pts)
Soit l'équation différentielle linéaire de second ordre suivante :

$$y'' - 5y' - 14y = (3x^2 + 2x - 1)e^x \qquad (I)$$

2
1) Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante.
2) Déterminer les réels α, β, γ pour que $y_p(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x$ soit une solution particulière de (I). 2
$\alpha = -\frac{1}{6}, \beta = \frac{-1}{18}$
3) Donner la solution générale de (I). 1
$\gamma = \frac{5}{108}$

Bon courage

Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département ST1.

Corrigé de l'examen de rattrapage de Maths2.

Exo1:

1)
$$|A_\alpha| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} \overset{C_1-C_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ \alpha-1 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} \overset{C_2-2C_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha-1 & -2\alpha+5 & \alpha-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ \alpha-1 & -2\alpha+5 \end{vmatrix} = 3\alpha - 18 = 3(\alpha-6)$$ 1,5

2) A_α est inversible si et seulement si $|A_\alpha| \neq 0$,
$|A_\alpha| \neq 0 \iff \boxed{\alpha \neq 6}$ 0,5

3)
$$A_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 5x + y + 3z = 1. \end{cases}$$

$|A_5| = 3(5-6) = -3$. (D'après la 1ère question), le système admet une seule solution:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A_5|} = \frac{16}{-3}$$ 1

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A_5|} = \frac{8}{3}$$ 1

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A_5|} = \frac{25}{3}.$$ 1

la solution de (S) est $\left(\frac{16}{-3}, \frac{8}{3}, \frac{25}{3}\right)$

Exo2 :

1) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3P.$ 0,5

. $PQ = P\left[\frac{1}{4}(I_3+P)\right] = P\cdot\frac{1}{4}I_3 + P\cdot\frac{1}{4}P$

$= \frac{1}{4}P.I_3 + \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}(3P)$

$= \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}P = P.$ 0,5

. $QP = \frac{1}{4}(I_3+P)\times P = \frac{1}{4}I_3\times P + \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}P$

$= P.$ 0,5

2) $P^3 = P\times P\times P = (PQ)(PQ)(PQ)$

$= P(QP)Q(PQ) = P(PQ)Q(QP)$ 1,5

$= P^2Q^3P = 3PQ^3P.$

3) $(4I_3 - P)Q = 4I_3 \cdot Q - PQ$

$= 4Q - PQ = 4\left(\frac{1}{4}(I_3+P)\right) - PQ$

$= I_3 + P - PQ = I_3 + P - P = I_3.$ 0,5

$Q(4I_3 - P) = Q.(4I_3) - QP = 4Q - QP$

$= 4Q - PQ = I_3$ 0,5

On conclut que Q est inversible. 0,5

4) $Q^{-1} = 4I_3 - P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

0,5

Exercice 3 *1) On a*

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}.$$

0,5

donc $a=-1$ *et* $b=1$.

2) On a

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-5x+6}dx &= \int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{1}{x-3}dx\\ &= -\ln|x-2|+\ln|x-3|+C\\ &= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

1

3) On a

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\frac{1}{x^2-5x+6}dx\\ &= \left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_0^1\\ &= \ln 2-\ln\frac{3}{2}\\ &= \ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

0,5

Posons $x=\sin t$, *donc* $dx=\cos t\,dt$ *et on aura*

$$\begin{aligned}J &= \int_0^{\pi/2}\frac{2\cos t}{6-5\sin t+\sin^2 t}dt\\ &= 2\int_0^1\frac{1}{x^2-5x+6}dx\\ &= 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

1

4) Soit $x\in]3,+\infty[$ *et considérons l'équation différentielle suivante:*

$$y'+\frac{1}{x^2-5x+6}y=\frac{x-3}{x^2-5x+6}. \qquad (1)$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Soit l'équation sans second membre

$$y'+\frac{1}{x^2-5x+6}y=0 \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}(2) &\iff \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2-5x+6}y\\ &\iff \int\frac{dy}{y}=\int\frac{-1}{x^2-5x+6}dx\\ &\Longrightarrow -\ln|y|=\ln\frac{x-3}{x-2}+C,\ C\in\mathbb{R}\\ &\Longrightarrow y=K\frac{x-2}{x-3},K\in\mathbb{R}\ (y=0 \text{ est une solution triviale}).\end{aligned}$$

1

3

Variation de la constante K :
On a

$$\begin{aligned} y' &= K'\frac{x-2}{x-3} + K\frac{(x-3)-(x-2)}{(x-3)^2} \\ &= K'\frac{x-2}{x-3} + K\frac{1}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

On remplace y' et y dans (1) et on trouve

$$K'\frac{x-2}{x-3} + K\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{x^2-5x+6} \times K\frac{x-2}{x-3} = \frac{x-3}{x^2-5x+6},$$

1

donc

$$K'\frac{x-2}{x-3} = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$$

i.e.

$$\cancel{K' = \frac{1}{x-3}} \qquad K' = \frac{x-3}{(x-2)^2}$$

Par conséquent

$$\cancel{K = \ln|x-3| + C, C \in \mathbb{R}.} \qquad K = \int \frac{x-3}{(x-2)^2}\,dx \Rightarrow$$

Finalement

$$\cancel{y = (\ln|x-3| + C)\frac{x-3}{x-2}, C \in \mathbb{R}.} \qquad y = \left(\int \frac{x-3}{(x-2)^2}\,dx\right)\frac{x-2}{x-3}$$

Exercice 4 *Soit l'équation différentielle*

$$y'' - 5y' - 14y = \left(3x^2 + 2x - 1\right)e^x. \tag{3}$$

1) L'équation homogène associée à (3) est

$$y'' - 5y' - 14y = 0 \tag{4}$$

2

Son équation caractéristique

$$r^2 - 5r - 14 = 0$$

a deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 7$. Sa solution générale est donc définie par

$$y_0(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{7x} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2) On a $y_p(x) = \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)e^x$, $y_p'(x) = \left[\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)\right]e^x$ et $y_p''(x) = \left[\alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + (2\alpha + 2\beta + \gamma)\right]e^x$.
En injectant y_p, y_p' et y_p'' dans (3) et par identification, on trouve

2

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-1}{6} \\ \beta = \dfrac{-1}{18} \\ \gamma = \dfrac{5}{108}. \end{cases}$$

Finalement

$$y_p(x) = \left(\frac{-1}{6}x^2 - \frac{1}{18}x + \frac{5}{108}\right)e^x$$

est une solution particulière de (3).

3) La solution générale de (3) est donc définie par

$$y_0(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{7x} + \left(\frac{-1}{6}x^2 + \frac{-1}{18}x + \frac{5}{108}\right)e^x \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1