Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département première année Technologie

Juin 2013

Examen de rattrapage de MATHS 2
Durée 2 heures

Exercice n° 1. (5 pts)
Soit f une fonction continue de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant : $f(\pi - x) = f(x)$.
Posons :

$$I = \int_0^\pi x f(x) dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^\pi f(x) dx$$

1) En utilisant le changement de variable $x = \pi - y$ dans I, montrer que $I = \frac{\pi}{2} J$.
2) Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.
3) Déduire de 1) et 2) la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.
Indications : $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + cst$, $\arctan 0 = 0$, $\arctan \pi \simeq 1.2626$.

Exercice n° 2. (6 pts)
1) Résoudre les équations différentielles de premier ordre suivantes :
a) $y' + y = e^x$.
b) $y' + y^2 = e^{x}$
2) Résoudre l'équation différentielle de second ordre suivante :

$$y'' - y' - 6y = \cos x + x^2$$

Exercice n° 3. (6 pts)
1) Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S_1) \ : \ \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

2) Le système linéaire suivant :

$$(S_2) \ : \ \begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

peut-il admettre une solution unique ? Justifier votre réponse.

Exercice n° 4. (3 pts)
Pour tout nombre réel θ, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
1) Vérifier que $(R(\theta))$ est inversible et calculer son inverse.
2) Démontrer $(R(\theta))^3 = R(3\theta)$. Déduire que $(R(\theta))^3$ est inversible.

Bonne chance.

Université A. Mira
Faculté de Technologie
Département 1ère années de Technologie

Joiu 2013.

Corrigé de l'examen
de rattrapage Maths 2.

1/8

Exo1:

1) Posons $x = \pi - y$:

$$I = -\int_{\pi}^{0} (\pi - y) f(\pi - y)\, dy = \int_{0}^{\pi} (\pi - y) f(\pi - y)\, dy.$$

$$I = \pi \int_{0}^{\pi} f(\pi - y)\, dy - \int_{0}^{\pi} y f(\pi - y)\, dy \ldots \text{①}.$$

Comme $f(\pi - y) = f(y)$ donc:

$$I = \pi \int_{0}^{\pi} f(y)\, dy - \int_{0}^{\pi} y f(y)\, dy.$$

2,5

$$I = \pi J - I \iff 2I = \pi J \iff \boxed{I = \frac{\pi}{2} J}$$

2) $$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = -\int_{1}^{-1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

1,5

$$= \arctan(1) - \arctan(-1)$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3) Comme $\dfrac{\sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ donc

d'après 1) et 2):

$$\int_{0}^{\pi} x \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

1

Exo2 :

2/8

a) $y' + y = e^{x}$ ... (E)

$y' + y = 0$ ... (H)

(H) $\Leftrightarrow$ $y' = -y$ $\Leftrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = -y$.

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{y}\, dy = -dx$

$\Leftrightarrow$ $\ln|y| = -x + c$

$\Leftrightarrow$ $|y| = e^{-x} \cdot e^{c}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{y = k \cdot e^{-x}}$ $k = \pm e^{c}$ 1

* Variation de la constante :

$y_p = k(x)\, e^{-x}$ en remplaçant dans (E)

$k'(x) \cdot e^{-x} - \cancel{k(x)\, e^{-x}} + \cancel{k(x)\, e^{-x}} = e^{x}$

$k'(x)\, e^{-x} = e^{x}$ $\Leftrightarrow$ $k'(x) = e^{2x}$

$\Leftrightarrow$ $k(x) = \frac{1}{2}\, e^{2x}$

La solution ~~général~~ particulière de (E) : $\boxed{y_p = \frac{1}{2}\, e^{x}}$

la solution générale de (E) : $\boxed{y_G = k \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}\, e^{x}}$ 1

b) $y' + y^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $y' = -y^2$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{y^2}\, dy = dx$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{y} = x + c$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{y = \frac{1}{x+c}}$ 1

3/8

2] $y'' - y' - 6y = \cos x + x^2$ -- (E)

$y'' - y' - 6y = 0$ ...... (H)

(EC) : $r^2 - r - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$r_1 = \frac{1+5}{2} = 3$, $r_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.

$\boxed{y_G(H) = \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x}}$

2

* Solution particulière de (E) : (Principe de superposition) :

$y'' - y' - 6y = \cos x$ -- (E₁)

$y_p(E) = a\cos x + b\sin x$

$y'_p(E) = -a\sin x + b\cos x$

$y''_p(E) = -a\cos x - b\sin x$

en remplace dans E_1

$-a\cos x - b\sin x + a\sin x - b\cos x - 6a\cos x - 6b\sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow (-7a - b)\cos x + (-7b + a)\sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -7a - b = 1 \text{ -- } ① \\ -7b + a = 0 \Leftrightarrow a = 7b \text{ -- } ② \end{cases}$

$① \Rightarrow -49b - b = 1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{50}$.

$a = -\frac{7}{50}$

$$\boxed{y_p(E_1) = -\frac{7}{50}\cos x - \frac{1}{50}\sin x} \text{ --- } 0,5$$

4/8

$$y'' - y' - 6y = x^2 \quad \cdots (E_2)$$

la solution particulière est de la forme

$$\left.\begin{aligned} y_p(E_2) &= ax^2 + bx + c \\ y_p'(E_2) &= 2ax + b \\ y_p''(E_2) &= 2a \end{aligned}\right\} \text{En remplace dans } (E_2)$$

$$2a - 2ax - b - 6ax^2 - 6bx - 6c = x^2$$

$$-6ax^2 + (-2a - 6b)x + 2a - b - 6c = x^2$$

$$\begin{cases} -6a = 1 & \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{1}{6}} \\ -2a - 6b = 0 & \Leftrightarrow 6b = -2a \Leftrightarrow b = \frac{-2a}{6} \\ 2a - b - 6c = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{b = +\frac{2}{36}} \; ; \; b = \frac{+1}{18}$$

$$c = \frac{2a - b}{6} = -\frac{2}{36} - \frac{1}{108} = \frac{-6 - 1}{108}$$

$$\boxed{c = \frac{-7}{108}}$$

$$\boxed{y_p(E_2) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{7}{108}} \text{ --- } 0,5$$

$$\boxed{y_G(E) = -\frac{7}{50}\cos x - \frac{1}{50}\sin x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{7}{108} + \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x}}$$

Exercice n°03 :

5/8

1) $(S_1) : \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

$$(S_1) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \quad X = B$$

* Calcul du det A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 0 - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3$$

$\det A \neq 0$ alors (S_1) est un systeme de Cramer alors il admet une solution unique.

$x_1 =$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{3} = 4$$

4

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-9}{3} = -3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{} = \frac{6}{} = 2$$

2) (S_2) : $\begin{cases} -x+y-z = 2 \quad \dots ① \\ 3x - y + z = 0 \quad \dots ② \end{cases}$

2/8

(S_2) admet une infinité de solution car :

① + ② $\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ en remplace $x = 1$ dans ① et ②

on obtient : $\begin{cases} y - z = 3 \\ -y + z = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{y = z + 3}$

2

Alors l'ensemble de solution de (S_2) est :

$$S = \{(1, 3+z, z) / z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice n° 4 :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $R(\theta)$ est inversible

1

On a : $|R(\theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$

$$= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

$|R(\theta)| = 1 \neq 0$ donc $R(\theta)$ est inversible

Le calcul de $(R^{-1}(\theta))^{-1}$

$$(R(\theta))^{-1} = \frac{1}{|R(\theta)|} \cdot C^t = C^t.$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

7/8

$$C^t = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1

D'où $\left(R(\theta)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

2) Démontrer que $\left(R(\theta)\right)^3 = R(3\theta)$

$$\left(R(\theta)\right)^2 = R(\theta) \cdot R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\cos^2\theta - \sin^2\theta}_{\cos 2\theta} & \underbrace{\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta} \\ \underbrace{-\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta}_{-\sin(2\theta)} & \underbrace{-\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{\cos 2\theta} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}}$$

$$[R(\theta)]^3 = [R(\theta)] \cdot [R(\theta)]^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta}_{\cos 3\theta} & \underbrace{\cos\theta\sin 2\theta + \sin\theta\cos 2\theta}_{\sin 3\theta} \\ \underbrace{-\sin\theta\cos 2\theta - \cos\theta\sin 2\theta} & \underbrace{-\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$$

Déduire que $[R(\theta)]^3$ est inversible :

On a : $\det [R(\theta)]^3 = \det R(3\theta) = \begin{vmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{vmatrix}$

$= 1 \neq 0$

donc : $R(\theta)^3$ est inversible.

8/8