Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Juin 2017

Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (9 points)

I. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice A. Il vient, en développant par rapport à la troisième colonne.

$$det(A) = 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

1,5

b. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $det(A) = -3 \neq 0$. Calculons l'inverse de A, on a $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^t(com(A))$.

0,5

$$com(A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad donc \quad {}^t(com(A)) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2

c. Déduire la solution du système suivant :

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1

II. Résoudre suivant les valeurs de m le système linéaire (S_m) suivant :

$$S_m = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + mx_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = m \end{cases}$$

L'écriture matricille de S_m est $A_mX = B_m$ où $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$B_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$

Après calculs, on trouve $det(A_m) =$

$$det(A_m) = 1\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$ 0,5

A_m est inversible si et seulement si $det(A_m) \neq 0$ c'est à dire si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. On destingue trois cas pour la résolution de système S_m :

a $m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ donc $S_m$est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)(m+1)} = \frac{2m}{(m+1)}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{(m-1)(m+1)} = 0$$ 1,5

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1}$$

b Si $m = -1$ le système $S_{(-1)}$ n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de $A_{(-1)}$, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de déterminant égal à -2.

$$S_{(-1)} = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} (S_M) : \begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 + x_3 \\ x_1 - 1x_2 & = 1 + x_3 \end{cases} \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Le système (S_M) associé à M admet une solution (paramétrique) unique donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + x_3 & 1 \\ 1 + x_3 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1 + x_3 \qquad et \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 + x_3 \\ 1 & 1 + x_3 \end{vmatrix}}{(-2} = 0$$

Cette solution ne vérifie pas la troisième équation de $S_{(-1)}$. Donc le système $S_{(-1)}$ n'admet pas de solutions.

1

c Si $m = 1$ le système $S_{(1)}$ n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de $A_{(1)}$, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant égal à 2.

$$S_{(1)} = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (S_M) : \begin{cases} x_1 - x_3 & = 1 - x_2 \\ x_1 + x_2 & = 1 - x_3 \end{cases} \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Le système (S_M) associé à M admet une solution (paramétrique) unique donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1\text{-}\, x_2 & \text{-}1 \\ 1\text{-}\, x_2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = 1 - x_2 \qquad et \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1\text{-}\, x_2 \\ 1 & 1\text{-}\, x_2 \end{vmatrix}}{(2} = 0$$

1

cette solution vérifie la deuxième équation de e $(S_{(1)})$. Donc le système $(S_{(1)})$ admet une infinité de solutions.

Exercice 2. (7 points)

1. Déterminons les constantes réelles a, b et c qui vérifient :
   $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$.
   On a $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (-4a-3b+c)x + (4a+2b-c)}{(x-1)(x-2)^2}$
   En identifiant, on obtient : $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$
   donc $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. 1
2. Trouver les primitives des fonctions $\frac{a}{x-1}$, $\frac{b}{x-2}$ et $\frac{c}{(x-2)^2}$;
   $\int \frac{1}{x-1} dx = ln|x-1| + c_1$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$. 0,5
   $\int \frac{1}{x-2} dx = ln|x-2| + c_2$ avec $c_2 \in \mathbb{R}$. 0,5
   et
   $\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = -\frac{1}{(x-2)} + c_3$ avec $c_3 \in \mathbb{R}$. 0,5
   On déduire la primitive de la fonction $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$.
   $$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} dx &= ln|x-1| + c_1 - ln|x-2| c_2 - \frac{1}{(x-2)} + c_3 \\ &= ln|x-1| - ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} + K \qquad avecK = c_1 + c_2 + c_3 \in \mathbb{R} \\ &= ln|\tfrac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K \end{aligned}$$
   0,5
3. Résoulution de l'équation différentielle suivante : $(x-2)y' - y = \frac{1}{(x-1)}$.
   on a $(x-2)y' - y = \frac{1}{(x-1)} \Longrightarrow (x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 1....(I)$ est une équation différentielle non homogène (ou avec second membre). Résolution de l'équation homogène $(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 0$
   $$(x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{(x-2)} dx$$
   1

et par suite
$ln|y| = ln|x-2| + C_1$ où $C_1 \in \mathbb{R}$
D'où $y(x) = C(x-2)$, $C = \mp exp(C1)$
Résolution de l'équation avec second membre $((x-2)(x-1)y' - (x-1)y = 1)$
Méthode de la variation de la constante : Soit $y(x) = C(x-2)$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante C, et la solution générale de l'éqution avec le second membre (I) sera : $y(x) = C(x)(x-2)$. On a
$y'(x) = C'(x)(x-2) + C(x)$. En remplaçant y et y' dans l'équation (I), on obtient
$C'(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$
par conséquent $C(x) = ln|\frac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K$
Finalement la solution générale de l'équation (I) est
$y(x) = (ln|\frac{x-1}{x-2}| - \frac{1}{(x-2)} + K)(x-2)$.

4. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 4y' - 5y = (1-x)e^x$$

. Résolution de l'équation homogène

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 4r - 5 = 0 ...(1)$$

admet deux racines réelles distinctes $r1 = 1$ et $r2 = -5$. Ainsi, la solution générale de (1) est

1

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{-5x}$$

, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. simple

0,5

$m = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique, donc $y_1 = xP_1(x)e^x$ avec $P_1(x) = ax + b$. En identifiant, on trouve $a = -\frac{1}{12}$ et $b = \frac{7}{36}$. D'où
$y_1 = x(-\frac{1}{12}x + \frac{7}{36})e^x$
$= (-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{36}x)e^x$

1

Finalement,

$$y_G = C_1e^x + C_2e^{-3x} + (-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{36}x)e^x$$ 0,5

Exercice 3. (4 points)
Calculons les deux intégrales suivantes :

1. $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx = ln|(x+\sin x)| + K_1$ où $K_1 \in \mathbb{R}$. 1,5
2. $\int e^{-x}\sin x dx$, intégration par parties

•

$$f(x) = e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = -e^{-x}$$
$$g'(x) = \sin x \Longrightarrow g(x) = -\cos x.$$

Donc

$$\int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx$$ 1

encore une deuxième fois intégration par parties pour $\int e^{-x}\cos x dx$

$$f(x) = e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = -e^{-x}$$
$$g'(x) = \cos x \Longrightarrow g(x) = \sin x.$$

$$\int e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx$$

Finalement,

$$\int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\cos x - (e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx)$$ 1,5

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$