Université A/ Mira de Béjaia Avril 2017
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Corrigé de l'examen de Rattrapage de Maths1

Exercice 1.

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons la propriété $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Pour n=1, on a $\frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$ et $\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$ donc $P(1)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ vraie (ie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$) et montrons que $P(n+1)$ est vraie (ie $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$).

On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\Big) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

2. Montrer par contraposition que si $x \neq -\frac{1}{3}$ et $y \neq 7$ alors $3xy - 21x + y + 3 \neq 10$.

La contraposée de la proposition est $3xy - 21x + y + 3 = 10 \Longrightarrow x = -\frac{1}{3} ou y = 7$

on a
$$\begin{aligned}
3xy - 21x + y + 3 = 10 &\Longrightarrow 3xy - 21x + y - 7 = 0 \\
&\Longrightarrow 3x(y-7) + (y-7) = 0 \\
&\Longrightarrow (y-7)(3x+1) = 0 \\
&\Longrightarrow y = 7 ou x = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Par le principe de contraposition, on a démontré la proposition si $x \neq -\frac{1}{3}$ et $y \neq 7$ alors $3xy - 21x + y + 3 \neq 10$.

Exercice 2. (8 points)

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned}
f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = \frac{2x}{x^2+1}
\end{aligned}$$

i) Calculons $f(\{2\})$, $f(\{\frac{1}{2}\})$ et $f^{-1}(\{2\})$.

$$\begin{aligned} f(\{2\}) &= \{f(x)/x \in \{2\}\} \\ &= \{f(x)/x = 2\} = \{\frac{4}{5}\} \\ f(\{\tfrac{1}{2}\}) &= \{f(x)/x \in \{\tfrac{1}{2}\}\} \\ &= \{f(x)/x = \tfrac{1}{2}\} = \{\frac{4}{5}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\frac{2x}{x^2+1} = 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x^2 - x + 1 = 0 \text{ (n'a pas de solutions réelles)}\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

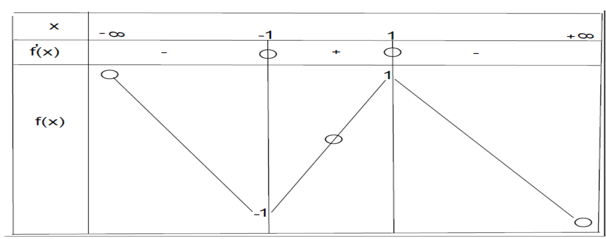
ii) Montrons que f n'est pas injective et qu'elle n'est pas surjective.

- f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$
- f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent.

iii) Montrons que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

$f'(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$ ce qui veut dire f' est strictement positive sur $]-1, 1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

Tableau de variation de f est comme suit.



d'ou $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

iv) Montrons que la restriction suivante est une bijection. Et on détermine l'application réciproque de g.

$$\begin{aligned} g: \quad [-1,1] &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

On a l'équation $f(x) = y$ a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions si et seulement $y \in [-1, 1]$, donc les solutions x possibles de l'équation $f(x) = y$ sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Soit $y \in [-1, 1]\backslash\{0\}$. Les solutions possibles de l'équation g(x)=y sont x_1 ou x_2.

L'unique solution appartient à $[-1, 1]$ est $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet

$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x_2} \in [-1, 1]$ (mais par contre la deuxième solution n'appartient

pas à $[-1,1]$, elle est strictement supérieure à 1 si $y>0$, et strictement inférieure à -1 si $y<0$).
D'autre part, si $y=0$ l'équation $g(x)=0$ admet pour unique solution $x=0$. Dans tous les cas, on a prouvé que pour tout $y\in[-1,1]$, l'équation $g(x)=y$ admet une unique solution avec $x\in[-1,1]$. Nous avons bien prouvé que g est une bijection et que L'application réciproque de g est :

$$\begin{aligned} g^{-1}: \quad [-1,1] &\longrightarrow [-1,1] \\ y &\longmapsto g^{-1}(x)=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

.

Exercice 3. (7 points)
I. Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation binaire $\mathcal{T}$ par :

$$\forall x,\ \ y\in\mathbb{R},\quad x\ \mathcal{T}\ y \Longleftrightarrow \cos^2 x+\sin^2 y=1$$

(a) Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
(i) Réflixivité de $\mathcal{T}$: $\forall x\in\mathbb{R}$. On a la formule

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Longrightarrow x\mathcal{T}x$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\mathcal{T}x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{T}$.
(ii) Symétrique de $\mathcal{T}$: $\forall x,y\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x\mathcal{T}y &\Longrightarrow \cos^2 x+\sin^2 y=1 \\ &\Longrightarrow \cos^2 x+\sin^2 y+(\cos^2 y+\sin^2 x)=1+(\cos^2 y+\sin^2 x) \\ &\Longrightarrow \cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 y+\sin^2 y=1+(\cos^2 y+\sin^2 x) \\ &\Longrightarrow 1+1=1+(\cos^2 y+\sin^2 x) \\ &\Longrightarrow 1=\cos^2 y+\sin^2 x \\ &\Longrightarrow \cos^2 y+\sin^2 x=1 \\ &\Longrightarrow y\mathcal{T}x \end{aligned}$$

Donc $\forall x,y\in\mathbb{R}, x\mathcal{T}y\Longrightarrow y\mathcal{T}x$. D'où la symétrie de $\mathcal{T}$
(iii) transitivité de $\mathcal{T}$:
$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{T}y \\ et \\ y\mathcal{T}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos^2 x+\sin^2 y=1...(1) \\ et \\ \cos^2 y+\sin^2 z=1...(2) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \text{(1)+(2)} &\Longrightarrow \cos^2 x+(\sin^2 y+\cos^2 y)+\sin^2 z=2 \\ &\Longrightarrow \cos^2 x+\sin^2 z=1 \\ &\Longrightarrow x\mathcal{T}z \end{aligned}$$

Donc $\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x\mathcal{T}yety\mathcal{T}z\Longrightarrow x\mathcal{T}z$. D'où la transitivité de $\mathcal{T}$.
De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
(b) La classe d'équivalence de $\dfrac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\pi}{6}} &= \{x\in\mathbb{R} : x\mathcal{T}\frac{\pi}{6}\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : \cos^2 x+\sin^2(\frac{\pi}{6})=1\} \end{aligned}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x = 1 - \sin^2(\frac{\pi}{6})\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x = 1 - (\frac{1}{2})^2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x = \frac{3}{4}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\}$$
$$= \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

II. On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x,\ \ y \in \mathbb{N}^*, \quad x\ \mathcal{S}\ y \Longleftrightarrow \exists\ \ n \in \mathbb{N}^*;\ \ y = x^n.$$

(a) Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation l'ordre.

(i) Reflixivité de $\mathcal{S}$: $\forall x \mathbb{N}^*$, on a $x = x^n$ pour $n = 1$
donc $x\mathcal{S}x$, d'où la réflixivité de $\mathcal{S}$.

(ii) Antisymétrique de $\mathcal{S}$: $\forall x,\ \ y \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ \ n \in \mathbb{N}^*;\ \ y = x^n \\ et \\ \exists\ \ m \in \mathbb{N}^*;\ \ x = y^m \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \exists\ \ n, m \in \mathbb{N}^*;\ \ x = (x^n)^m$$
$$\Longrightarrow \exists\ \ n, m \in \mathbb{N}^*;\ \ \ln x = \ln(x^{n\times m})$$
$$\Longrightarrow \exists\ \ n, m \in \mathbb{N}^*;\ \ (n \times m - 1)\ln x = 0$$

Ceci n'est possible que si $x = 1$, mais alors $y = 1 = x$ ou si $n \times m = 1$, ce qui implique $n = m = 1$ et donc $x = y$, d'où l'antisymétrié de $\mathcal{S}$

(iii) Transitivité de $\mathcal{S}$: $\forall x,\ \ y,\ \ z \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ \ n \in \mathbb{N}^*;\ \ y = x^n \\ et \\ \exists\ \ m \in \mathbb{N}^*;\ \ z = y^m \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \exists\ \ n, m \in \mathbb{N}^*;\ \ z = (x^n)^m \text{ (avec } n \times m \in \mathbb{N}^*)$$
$$\Longrightarrow \exists\ \ n \times m \in \mathbb{N}^*;\ \ z = x^{n\times m}$$
$$\Longrightarrow x\mathcal{S}z.$$

De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

(b) 2 n'est pas en relation avec 3 ($2 \not{\mathcal{S}}\, 3$) car $\nexists\, n \in \mathbb{N}^*;\ \ 3 = 2^n$
et, 3 n'est pas en relation avec 2 ($3 \not{\mathcal{S}}\, 2$) car $\nexists\, m \in \mathbb{N}^*;\ \ 2 = 3^m$ d'où l'ordre n'est pas total mais il est partiel.