



EXAMEN D'ANALYSE I

Durée : (02) deux heures.

Exercice 1 (04 pts). Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum s'ils existent des deux ensembles suivants (en justifiant, si nécessaire, vos réponses en utilisant la caractérisation des bornes supérieures et inférieures).

$$A = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}, \quad B = \left\{ 1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 2 (06 pts). Soit la fonction f définie par :

$$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}.$$

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

- (1) Étudier la monotonie des deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$.
- (3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - v_n| \leq (\frac{1}{2})^n$.
- (4) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- (5) Calculer la limite de chacune des deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 (06 pts). On définit la fonction f suivante : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2-e^x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ -x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- (1) Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} .
 - (2) Étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
 - (3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ? justifier votre réponse
- Il est permis d'utiliser la règle de l'Hôpital en cas de besoin.

Exercice 4 (04 pts).

- (1) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.
- (2) Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ tel que : $f(0) = 0$ et $f'(1).f(1) < 0$.
— Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Rolle.



Bon courage

Exercice 1 (4 pts) $A = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, $B = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

1) $A \neq \emptyset$ car $\exists x_0 = -1 \in \mathbb{R} / x_0 \in A$

$\forall x \in A: -1 \leq x \leq \sqrt{2}$

Donc $\exists M = \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \exists m = -1 \in \mathbb{R} / \forall x \in A: -1 \leq x < \sqrt{2}$
par suite A est bornée (A est majorée et minorée)

$\rightarrow A \neq \emptyset$ majorée, minorée $\Rightarrow \sup A, \inf A$ existent (0,25)

$\rightarrow \inf A = -1$ (existe) $\Rightarrow \inf A = \min A = -1$ (0,25)

Montrons que $\sup A = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ est un majorant de A , reste à montrer qu'il est le plus petit des majorants de A

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in A / x_0 > \sqrt{2} - \varepsilon$

on a, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{Q} / \sqrt{2} - \varepsilon < x < \sqrt{2}$

si $\varepsilon \geq \sqrt{2} + 1$ alors, il suffit de prendre $x_0 = -1$
leçon. ($\varepsilon < 1 + \sqrt{2}$)

comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} alors il suffit de prendre $x_0 = x \in \mathbb{Q} \cap]\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2}[\subset A$

Donc, $\sqrt{2}$ est le plus petit des majorants de A

et en résulte, $\sup A = \sqrt{2}$

Comme $\sup A = \sqrt{2} \notin A$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) (0,25)

alors $\max A$ n'existe pas.

2) $B \neq \emptyset$ car $\exists x_0 = 2 \in \mathbb{R} / x_0 \in B$

$\forall x \in B: 1 < x \leq 2$

Donc $\exists M = 2, m = 1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in B: 1 < x \leq 2$

B est bornée (B est majorée et minorée)

$B \neq \emptyset$ majorée et minorée $\Rightarrow \sup B, \inf B$ existent. (0,25)

$\rightarrow \text{MAX } B = 2$ (existe) car 2 est un majorant de B (0,2) qui est lui-même dans B . Ce qui entraîne que $\sup B = \text{MAX } B = 2$.

Montrons que $\inf B = 1$:

1 est un minorant de B ; reste à montrer qu'il est le plus. Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in B / x_0 < 1 + \varepsilon$

On choisira x_0 sous la forme $x_0 = 1 + \frac{1}{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$

$$1 + \frac{1}{n_0} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad (1)$$

Il suffit de prendre $n_0 = 1 + E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

(ou bien comme \mathbb{R} est Archimédien ($\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$), l'existence de n_0 est assurée)

Donc, 1 est le plus grand des minorants de B .

Il en résulte, $\inf B = 1$

comme $1 \notin B$ alors $\text{MIN } B$ n'existe pas. (0,25)

Exercice 2 (6 pts)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} \end{cases}$$

1/. La monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pour $D = [0, +\infty[$ on a bien $f(D) \subset D$ car :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1} \geq 0$$

ce qui montre que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies. Par suite, la monotonie des deux suites

(u_n) et (v_n) résulte de la croissance de f .

$$\forall x \in D: f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad (0,5)$$

Donc f est strictement croissante. Ce qui entraîne les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement monotones.

On a, $U_0 = 1$ et $U_1 = f(U_0) = f(1) = \frac{3}{2}$ (0,5)
comme $U_0 < U_1$ alors la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

On a, de même, $v_0 = 2$ et $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ (0,5)
comme $v_0 > v_1$ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante

2/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : |U_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |U_n - v_n|$

$$\begin{aligned} \text{On a, } U_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{2U_{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{2v_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{(2U_{n+1})(v_{n+1}) - (U_{n+1})(2v_{n+1})}{(U_{n+1})(v_{n+1})} \\ &= \frac{2U_n v_n + 2U_n + v_n + 1 - 2U_n v_n - U_n - 2v_n - 1}{(U_{n+1})(v_{n+1})} \\ &= \frac{U_n - v_n}{(U_{n+1})(v_{n+1})} \quad (0,5) \end{aligned}$$

$$\text{D'où, } |U_{n+1} - v_{n+1}| = \frac{|U_n - v_n|}{(U_{n+1})(v_{n+1})} \leq \frac{|U_n - v_n|}{U_{n+1}} \quad (0,5) \quad (\text{car } v_n > 1)$$

comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante alors $\forall m \in \mathbb{N} : U_n \geq U_0 = 1$

$$\text{D'où, } \forall m \in \mathbb{N} : \frac{1}{U_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \quad (0,5)$$

est en résulte, $\forall m \in \mathbb{N} : |U_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |U_n - v_n|$

3/ Montrons (par récurrence) que : $\forall m \in \mathbb{N} : |U_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m$

(a) Pour $n=0$: on a, $|U_0 - v_0| = |1 - 2| = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ (0,5)
la propriété est donc vraie pour $n=0$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|U_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m$ et montrons
que $|U_{n+1} - v_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$ (0,5)

$$\text{On a, } |U_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |U_n - v_n| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$\text{D'où, } \forall m \in \mathbb{N} : |U_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

4/ En déduire que (U_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$\text{On a, } \forall m \in \mathbb{N} : 0 \leq |U_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 0$ alors d'après le théorème de Goursat (0,5)

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |U_n - v_n| = 0$$

Par ailleurs, comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $|U_n - v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors (U_n) et (v_n) sont adjacentes.

5/ Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite

$$\exists ! l \in \mathbb{R} \quad l = \lim U_n = \lim v_n \quad (0,25)$$

En partant de la relation $U_{n+1} = f(U_n)$ et en prenant les limites de ces deux membres quand n tend vers $(+\infty)$, on trouve (avec la continuité de f)

$$l = f(l) = \frac{2l+1}{l+1} \quad (0,25)$$

ce qui donne, $l^2 - l - 1 = 0$

Les solutions de cette équation sont: $l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

comme $l_2 < 0$ alors l_2 ne peut être la limite de $(U_n)_n$

car $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0$ (0,25)

D'où, $l = l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (0,25)

→ Exercice 3 (6pts)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2-e^{2x})}{x} & \text{si } x < 0 \\ -x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1/ La continuité de f :

pour $x > 0$ $f(x) = -x-1$

f est un polynôme continue sur \mathbb{R} , par suite f est continue sur $]0, +\infty[$ (0,5)

→ pour $x < 0$: $f(x) = \frac{\ln(2-e^{2x})}{x}$

f est le produit, composée des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \frac{1}{x}$ fraction rationnelle continue sur $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

$f_2(x) = \ln x$ fonction usuelle continue sur $]0, +\infty[$

$f_3(x) = 2 - e^{2x}$ fonction usuelle continue sur \mathbb{R} , par suite sur \mathbb{R}_+^* (0,5)

($f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$) on a $f_3(]-\infty, 0[) =]1, 2[$ et f_2 est bien continue sur $]1, 2[$ par suite $f_2 \circ f_3$ est continue sur \mathbb{R}_+^*

et on résulte, f est continue sur \mathbb{R}_+^* car elle est le produit de deux fonctions f_1 et $(f_2 \circ f_3)$ continues sur cet

intervalle.

→ En $x=0$ on a $f(0) = -1$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x-1) = -1 = f(0)$ est continue à droite de $x=0$ (0,25)

Il reste à étudier la continuité de f à gauche en zéro. (on a 0,5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ (F.I.)}$$

$$\frac{\ln(2 - e^x)}{x} = \frac{\ln[1 + (1 - e^x)]}{x} = \frac{1 - e^x}{x} \cdot \frac{\ln[1 + (1 - e^x)]}{(1 - e^x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} \cdot \frac{\ln[1 + (1 - e^x)]}{(1 - e^x)}$$

$$= (-1)(1) = -1 = f(0)$$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$ alors f est continue en 0. (0,25)

Conclusion: f est continue sur \mathbb{R} .

La dérivabilité:

Sur $]0, +\infty[$ $f(x) = -x - 1$ dérivable sur \mathbb{R} car (0,5)

f est un polynôme par suite f est dérivable sur $]0, +\infty[$

Sur $] -\infty, 0[$: $f(x) = \frac{\ln(2 - e^x)}{x}$ est dérivable sur $] -\infty, 0[$

car f est le produit, composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* (0,5)

(pour les mêmes raisons que celles citées précédemment)

En $x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 1 + 1}{x} = -1$. f est dérivable à droite de $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = -1$. (0,25)

Il reste à étudier la dérivabilité de f à gauche en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(2 - e^x)}{x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^x) + x}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$\frac{\ln(2 - e^x) + x}{x^2} = \frac{\ln(e - e^x) + \ln e^x}{x^2} = \frac{\ln(2 - e^x)e^x}{x^2} = \frac{\ln[2e^x - e^{2x}]}{x^2}$$

$$= \frac{\ln[1 + (2e^x - e^{2x} - 1)]}{x^2} = \frac{-(1 - e^x)^2}{x^2} \cdot \frac{\ln[1 - (1 - e^x)^2]}{-(1 - e^x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^x) + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{1 - e^x}{x}\right)^2 \cdot \frac{\ln[1 - (1 - e^x)^2]}{-(1 - e^x)^2} = -1 \cdot 1 = -1$$

f est dérivable à gauche en 0 et on a: $f'_g(0) = -1$
 comme $f'_d(0) = -1 = f'_g(0)$ alors f est dérivable en 0. (0,25)

et on a $f'(0) = -1$

Conclusion: f est dérivable sur \mathbb{R} .

2/ f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?

Il s'agit d'étudier la continuité de f' sur \mathbb{R} .

$$\text{on a } f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

0,5

sur $] -\infty, 0[$

$$f'(x) = \frac{e^x}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)}{x^2} \text{ est continue sur}$$

car elle est la somme, produit, et composée de fonctions usuelles continues sur les intervalles requis.

0,25

sur $[0, +\infty[$: $f'(x) = -1$ constante donc continue sur cet intervalle.

0,25

Il reste à étudier la continuité à gauche de zéro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left[1 + \frac{e^x}{e^x-2} \right] - \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x-2}{x(e^x-2)} - \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{2}{e^x-2} - \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$$

$$= -2 + 1$$

$$= -1 = f'(0)$$

D'où, f' est continue à gauche de 0.

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = f'(0) = -1$$

Alors f' est continue en 0.

Conclusion: f' est continue sur \mathbb{R} .

D'où, f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Remarque: La limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ peut être également calculée en utilisant la règle de l'Hôpital.

0,5

0,25

0,25

Exercice 4 (4 pts)

1/ Montrons que: $\exists x \in]0, 1[/ 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$

Soit f la fonction suivante:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x \quad (4)$$

f est un polynôme continue et dérivable sur \mathbb{R} , par suite continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$

On a $f(0) = 0$ et $f(1) = (a+b+c) - (a+b+c) = 0$

Donc $f(0) = f(1)$

f continue sur $[0, 1]$
 f dérivable sur $]0, 1[$
 $f(0) = f(1)$

} $\xrightarrow[\text{théorème}]{\text{de Rolle}}$ $(\exists x_0 \in]0, 1[\text{ tel que } f'(x_0) = 0)$ (4)

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 = a+b+c$$

2/ On introduit la fonction g suivante:

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} & \text{si } x \in [0, 1[\\ f'(1) & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (0,5)$$

g est continue sur $[0, 1]$ car:

sur $[0, 1[$: $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ produit de deux fonctions continues sur $[0, 1[$

$g = g_1 \cdot g_2$ où $g_1(x) = \frac{1}{x-1}$ continue sur $[0, 1[$ (0,25)

$g_2(x) = f(x) - f(1)$ continue sur $[0, 1[$ (car f est continue sur $[0, 1]$)

En $x=1$ (à gauche) Comme f est dérivable au pts $x_0=1$

on a, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ (0,25)

C'est à dire $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1)$

D'où, la continuité de g à gauche du pts $x_0=1$

Conclusion : g est continue sur $[0, 1[$

$\rightarrow g$ est dérivable sur $]0, 1[$ car elle est le produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\text{On a } \left\{ \begin{array}{l} g(0) = \frac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = f(1) \quad \text{car } f(0) = 0 \\ g(1) = f'(1) \end{array} \right.$$

comme $f'(1) \cdot f(1) < 0$ (Hypothèse) alors $g(0) \cdot g(1) < 0$
ce qui entraîne d'après le théorème des valeurs intermédiaires
qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $g(x_0) = 0$

ce qui revient à dire :

$$\rightarrow \exists x_0 \in]0, 1[\text{ tel que } f(x_0) = f(1)$$

est en résulte d'après le théorème de Rolle

$$\exists c \in]x_0, 1[\subset]0, 1[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Barème de l'examen d'Analyse I

2015 - 2016

Exercice 1 (4pts)

$A \neq \emptyset$ majorée et minorée	$\Rightarrow \sup A, \inf A$ existent	→ 0,25 pt
$B \neq \emptyset$ majorée et minorée	$\Rightarrow \sup B, \inf B$ existent	→ 0,25 pt
$\inf A = 1$	$\inf B = 1$	→ 1 pt
$\inf A = 1$	$\inf B = 1$	→ 0,25 pt
$\sup A = \sqrt{2}$	$\sup B = \text{MAX } B = 2$	→ 0,25 pt
$\text{MAX } A$ n'existe pas	$\text{MAX } B = 2$	→ 0,25 pt
$\text{MIN } B$ n'existe pas	$\text{MIN } B = 1$	→ 0,25 pt

Exercice 2 (6pts) f est strictement croissante → 0,5 pt

- 1/ Monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ → 0,5 pt
- Monotonie de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ → 0,5 pt
- 2/ $\forall m \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - v_{n+1}| < \frac{1}{2} |u_n - v_n|$ → 1,5 pt
- 3/ $\forall m \in \mathbb{N} \quad |u_n - v_n| < \frac{1}{2^n}$ → 1 pt
- 4/ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes → 1 pt
- 5/ $\lim u_n = \lim v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ → 1 pt

Exercice 3 (6pts)

- 1/ La continuité de f :
 - sur $]0, +\infty[$ → 0,5 pt
 - sur $] -\infty, 0[$ → 0,5 pt
 - en $x = 0$ → 1 pt
- 2/ La dérivabilité de f :
 - sur $]0, +\infty[$ → 0,5 pt
 - sur $] -\infty, 0[$ → 0,5 pt
 - en $x = 0$ → 1 pt
- 3/ f est de classe C^1 sur \mathbb{R} → 2 pt

Exercice 4 (4pts)

- 1/ $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x, x \in [0,1]$ → 1 pt
- Rolle sur $[0,1]$ → 1 pt
- 2/ $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} & \text{si } x \in [0,1] \\ f'(x) & \text{si } x = 1 \end{cases}$ → 0,5 pt
- (a) TVI sur $[0,1]$ → 1 pt