جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

28/01/2014
Durée : 2 H

Examen d'Analyse I

Appareils électroniques et documents sont interdits.
Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. (**06 pts**) *Soient* $a, b, u_1, v_1 \in \mathbb{R}$, *où* $u_1 < v_1$ *et* $0 < b < a$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{au_n + bv_n}{a+b}, \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{av_n + bu_n}{a+b}. \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < v_n$.
2) Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3) Exprimer $v_n - u_n$ *en fonction de* $v_1 - u_1$. *Déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont adjacentes.*
4) Exprimer $v_n + u_n$ *en fonction de* $v_1 + u_1$. *Déterminer la limite de chacune des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. (**06 pts**) *Soit* f *une fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & si\ x \leq 0, \\ \\ 1 - e^x & si\ x > 0. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f *sur* $\mathbb{R}$.
2) Etudier la dérivabilité de f *sur* $\mathbb{R}$.
3) La fonction f *est-elle de classe* $C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 3. (**05 pts**)
1) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que

$$\forall x > 0,\ \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}.$$

2) Déduire la limite suivante $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}\right) e^x$.

Exercice 4. (**03 pts**) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soient* $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n+1}.$$

En appliquant le théorème de Rolle montrer que l'équation :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = x^n,$$

possède une solution dans $]0, 1[$.

Bon courage

Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

28/01/2014
Durée : 2 H

Corrigé

Solution .1

1) Montrons que *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$. On raisonne par récurrence.*

Pour $n = 1$, on a : $u_1 < v_1$, on suppose que la propriété est vraie à l'ordre n $(u_n < v_n)$ et on montre qu'elle vraie à l'ordre $n+1$ $(u_{n+1} < v_{n+1})$. On a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - \frac{av_n + bu_n}{a+b} = \frac{a(u_n - v_n) - b(u_n - v_n)}{a+b} = \frac{(a-b)(u_n - v_n)}{a+b} < 0$$

1 pt

(l'hypothèse et $a < b$). D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.

2) La monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***et*** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - u_n = \frac{au_n + bv_n - au_n - bu_n}{a+b} = \frac{b(v_n - u_n)}{a+b} > 0.$$

1 pt

D'où $((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante$)$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{av_n + bu_n}{a+b} - v_n = \frac{av_n + bu_n - av_n - bv_n}{a+b} = \frac{b(u_n - v_n)}{a+b} < 0.$$

1 pt

D'où $((v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante$)$.

3) L'expression de $v_n - u_n$ ***en fonction*** $v_1 - u_1$.

<u>1ère méthode</u> *On a :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{av_n + bu_n}{a+b} - \frac{au_n + bv_n}{a+b} = \frac{a(v_n - u_n) + b(u_n - v_n)}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}(v_n - u_n) \\ &= \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 (v_{n-1} - u_{n-1}) \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &= \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_1 - u_1), \end{aligned}$$

1 pt

donc

$$v_n - u_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1} (v_1 - u_1).$$

2ème méthode *On a*

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{a-b}{a+b}\left(v_n - u_n\right),$$

donc la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est géométrique sa base* $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)$. *D'où* $v_n - u_n = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}(v_1 - u_1)$.

L'une croissante et l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}(v_1 - u_1) = 0$, 1pt

donc les deux suites sont adjacentes.

4) L'expression de $v_n + u_n$ ***en fonction*** $v_1 + u_1$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} + u_{n+1} &= \frac{av_n + bu_n}{a+b} + \frac{au_n + bv_n}{a+b} = \frac{a\left(v_n+u_n\right) + b\left(v_n + u_n\right)}{a+b} = \left(v_n + u_n\right). \\ &= v_{n-1} + u_{n-1} = \ldots = v_1 + u_1, \end{aligned}$$

0,5 pt

donc

$$v_n + u_n = v_1 + u_1.$$

les deux suites sont adjacentes, donc sont convergentes et ont la même limite.

Posons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = l$. *On a :* $v_n + u_n = v_1 + u_1$, *donc*

0,5 pt

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(v_n + u_n\right) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n + \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = v_1 + u_1 \\ &\Longleftrightarrow l + l = v_1 + u_1 \Longleftrightarrow 2l = v_1 + u_1 \Longleftrightarrow l = \frac{v_1+u_1}{2}. \end{aligned}$$

Solution .2

La fonction f *est définie sur* $\mathbb{R}$.

1) Etude de la continuité de f ***sur*** $\mathbb{R}$ 0,5

1-a) *Sur l'intervalle* $]-\infty, 0[$, *la fonction* f *est continue (rapport de deux fonctions continues).*

1-b) *Sur l'intervalle* $]0, +\infty[$, *la fonction* f *est continue (somme de deux fonctions continues).* 0,5

1-c) *La continuité de* f *en* 0. *On a*

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0) \ \ et \ \lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(1 - e^x\right) = 0 = f(0),$$ 1

donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$. *Alors* f *est continue en* 0. *D'où la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2) Etude de la dérivabilité de f ***sur*** $\mathbb{R}$

2-a) *Sur l'intervalle* $]-\infty, 0[$, *la fonction* f *est dérivable (rapport de deux fonctions dérivables).* 0,5

2-b) *Sur l'intervalle* $]0, +\infty[$, *la fonction* f *est dérivable, (somme de deux fonctions dérivables).* 0,5

2-c) *La dérivabilité de* f *en* 0. *On a*

$$f'_g(0) = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$$ 0,75

et

$$f'_d(0) = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1 - e^x}{x} = -1,$$ 0,75.

$$f'_g(0) = \frac{1}{2} \neq -1 = f'_d(0),$$ 0,5

donc la fonction f *n'est pas dérivable en* 0

3) La fonction f *n'est pas de classe* $C^1(\mathbb{R})$ $(f$ *n'est pas dérivable en* $0)$. 1

Solution .3

1) Montrons que $\forall x > 0,\ \dfrac{2}{(x+1)^3} < \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} < \dfrac{2}{x^3}$. *Posons*

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \text{ et } [a,b] = [x,\ x+1],$$ 1

puis on applique le théorème des accroissements finis à f *sur* $[x,\ x+1]$, *où* $x > 0$.

a) La fonction f *est continue sur* $[x,\ x+1],\ \forall x > 0$ 1

b) La fonction f *est dérivable sur* $]x,\ x+1[,\ \forall x > 0$. *Alors*

$$\exists c \in]x,\ x+1[: \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{c^3} \Longleftrightarrow \exists c \in]x,\ x+1[: \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{c^3}$$

$x < c < x+1 \Longrightarrow x^3 < c^3 < (x+1)^3 \Longrightarrow \dfrac{2}{(x+1)^3} < \dfrac{2}{c^3} < \dfrac{2}{x^3}$. *D'où* 1

$$\forall x > 0,\ \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}.$$

2) On a : $\forall x > 0,\ \dfrac{2}{(x+1)^3} < \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} \Longleftrightarrow \forall x > 0,\ \dfrac{2e^x}{(x+1)^3} < \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}\right) e^x$.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2e^x}{(x+1)^3} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) e^x = +\infty.$$ 2

Solution .4

Considérons le polynôme

$$P(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$ 1

On a :

$$P(0) = 0 \ \text{et} P(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} - \frac{1}{n+1} = 0,$$

donc $P(0) = P(1)$. P *est dérivable sur tout* $\mathbb{R}$, *en particulier sur* $]0,1[$ *et on a :* 1

$$P'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} - x^n.$$

En vertu le théorème de Rolle $\exists c \in]0,1[,\ P'(c) = 0$. *Ce qui signifie que l'équation* 1

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = x^n$$

admet au moins une solution dans $]0,1[$.