Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

28/06/2014

Durée : 2H

Examen de Rattrapage d'Analyse 1

Exercice 1. *(07 pts)*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - 1 & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f *sur* $\mathbb{R}$, *calculer* $f'(x)$.

2) Etudier la continuité de f' *en* 0. *La fonction* f *est-elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *? Justifier.*

Exercice 2. *(06 pts)*

Soit f *la fonction définie sur* $]-2, +\infty[$ *par*

$$f(x) = \ln(x+2) - x.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet exactement deux solutions* c_1 *et* c_2 *telles que* $-2 < c_1 < 0 < c_2$.

Exercice 3. *(07 pts)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Montrer que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3) Déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

4-a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est monotone.*

4-b) Déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.*

Bon courage

Université A. Mira. Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

Nom :

Prénom :

Corrigé (Examen de rattrapage d'Analyse 1)

Solution .1

1) La continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

a) La continuité de f sur $\mathbb{R}$

1-a) Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f est continue car $\frac{\sin x}{x} - 1$ *l'est* 0,5

2-a) La fonction f est continue au point $x = 0$. $\left(car \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0 = f(0) \right)$. 1

1,5

D'où f est continue sur $\mathbb{R}$

b) La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

1-b) Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f est dérivable car $\frac{\sin x}{x} - 1$ *l'est.*

2-b) La fonction f est dérivabilité au point $x = 0$, car

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0, \text{ (règle de L'Hôpital deux fois).}$$ 1

0,5

D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$ 1

2) La continuité de f' au point $x = 0$.

On a

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x \to 0} -\frac{\sin x}{2} = 0 = f'(0),$$ 1

donc f' est continue en 0. La fonction $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est continue sur $\mathbb{R}$.

1

Solution .2

On a $f(x) = \ln(x+2) - x,\ x \in \left]-2, +\infty\right[$. *Montrons que* f *admet exactement deux solutions* $-2 < c_1 < 0 < c_2$. *On a*

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - 1,\ \forall x \in \left]-2, +\infty\right[.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$$

$$\textit{Donc la fonction } f \left\{ \begin{array}{l} \textit{est strictement croissante sur } \left]-2, -1\right], \\ \textit{est strictement décroissante sur } \left[-1, 0\right], \\ \textit{est strictement décroissante sur } \left[0, +\infty\right[. \end{array} \right.$$

1) ***Sur l'intervalle*** $\left]-2, -1\right]$ *On a*

$$\left. \begin{array}{l} 01 \quad a)\ \textit{La fonction } f \textit{ est continue sur } \left]-2, -1\right], \\ 01 \quad b)\ \left(\lim\limits_{x \to -2} f(x)\right) . f(-1) = -\infty < 0, \\ 01 \quad c)\ \textit{La fonction } f \textit{ est strictement croissante sur } \left]-2, -1\right], \end{array} \right\} \xrightarrow{\textbf{T.V.I +la monotonie stricte}}$$

l'existence et l'unicité de c_1 *sur l'intervalle* $\left]-2, -1\right[$. 1

2) ***Sur l'intervalle*** $\left[-1, 0\right]$, *la fonction* f *n'admet aucune solution*
(*car* $-1 \leq x \leq 0 \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(-1) \Longrightarrow f(x) \in [\ln(2), 1]$) 1

3) ***Sur l'intervalle*** $\left[0, +\infty\right[$

$$\left. \begin{array}{l} 01 \quad a)\ \textit{La fonction } f \textit{ est continue sur } \left[0, +\infty\right[\\ 01 \quad b)\ \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) . f(0) = -\infty < 0 \\ 01 \quad c)\ \textit{La fonction } f \textit{ est strictement décroissante sur } \left[0, +\infty\right[\end{array} \right\} \xrightarrow{\textbf{T.V.I +la monotonie stricte}}$$

l'existence et l'unicité de c_2 *sur l'intervalle* $\left]0, +\infty\right[$. 1

Solution .3

1) Montrons que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$. *En appliquant le théorème des accroissements finis sur* $[n,\ n+1]$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$, *on obtient*

$$\exists c \in \left]n, n+1\right[,\ f(n+1) - f(n) = f'(c),$$

ou encore

$$\exists c \in]n, n+1[, . \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

On a

2

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

donc

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Montrons que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}}, \ \forall k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Longrightarrow 2\sqrt{n+1} - 2 < u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1,5

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ $\left(car\ u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \ et \lim\limits_{n \to +\infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = +\infty\right)$. 1

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

a) Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone . On a

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} = (u_{n+1} - u_n) - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < 0.$$

1,5

D'où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

b) Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée. On a

1

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2 \Longrightarrow u_n - 2\sqrt{n} > 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 2 > -2 \Longrightarrow v_n > -2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et minorée donc elle converge.