Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

12/12/2015
Durée : 1h et 30 min

Examen de rattrapage d'Analyse I

Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. (*06 pts*)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 3.$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone.*

3) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 2. (*07 pts*)

Soit f *une fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & si\ x \leq 0, \\ \\ \dfrac{x}{2} & si\ x > 0. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f *sur* $\mathbb{R}$.

2) Etudier la dérivabilité de f *sur* $\mathbb{R}$.

3) La fonction f *est-elle de classe* $C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 3. (*07 pts*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Montrer que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3) Déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

4-a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est monotone.*

4-b) Déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.*

Bon courage

Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa
Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

12/12/2015
Durée : 01 h et 30 min

Corrigé d'Analyse I (rattrapage)

Solution 1.

1) On raisonne par récurrence.

Pour $n = 0,\ 0 \leq u_0 = 0 \leq 3,$ *la propriété est vraie .*

Supposons que $0 \leq u_n \leq 3$ *et on montre que* $0 \leq u_{n+1} \leq 3$. *On a*

2

$$0 \leq u_n \leq 3 \Longrightarrow 3 \leq 2u_n + 3 \leq 9 \Longrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 3.$

2) La suite est une suite récurrente. On a

$$u_{n+1} = f(u_n) \ \text{ et } f([0,3]) \subset [0,3], \ \text{ où } f(x) = \sqrt{2x+3}.$$

2

L'étude de la monotonie de la suite (u_n) *revient à celle de la fonction* f. *Comme* f *est croissante sur* $[0,3]$ $\left(f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0,\ \forall x \in [0,3]\right)$ *et* $f(u_0) - u_0 = \sqrt{3} \geq 0$, *donc la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, majorée par* 3, *donc elle converge. Posons* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. *On a*

$$u_{n+1} = f(u_n) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \Longrightarrow l = f(l).$$

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{2l+3} \Leftrightarrow l^2 = 2l + 3 \Leftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0.$$

2

Cette dernière équation elle admet deux solutions $l_1 = -1$ *et* $l_2 = 3$,
donc $l = 3$ $\left(\text{car } u_n \geq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0\right)$.

Solution 2.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

1) Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$

1-a) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, La fonction f est continue (car rapport de deux fonctions continues)

1-b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, La fonction f est continue, (car f est un polynôme). 0,5

1-c) La continuité de f en 0. On a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0) \;\; et \; \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{2} = 0 = f(0).$$

2

donc $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Alors f est continue en 0. D'où la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Etude de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

2-a) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, La fonction f est dérivable (car rapport de deux fonctions dérivables)

2-b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, La fonction f est dérivable, (car f est un polynôme). 0,5

2-c) La dérivabilité de f en 0. On a

$$f'_g(0) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$$

et

$$f'_d(0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2},$$

2

La fonction f est dérivable en 0. D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$? On a

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} & si \; x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & si \; x > 0. \end{cases}$$

0,75

3-a) On a f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ (car sur $]-\infty, 0[$, rapport de deux fonctions continues et sur $]0, +\infty[$ est constante). 0,25

3-b) La continuité de f' en 0. On a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

et

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0), \;\; donc \; \lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0).$$

1

Alors f' est continue en 0. D'où f est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Solution 3. *1) Montrons que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $f(x)=\sqrt{x}$. *En appliquant le théorème des accroissements finis sur* $[n,\ n+1]$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$, *on obtient* 0,5

$$\exists c \in]n, n+1[,\ f(n+1)-f(n)=f'(c),$$ 0,5

ou encore

$$\exists c \in]n, n+1[,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{c}}.$$ 0,5

On a

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

donc

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$ 0,5

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Montrons que

$$u_n > 2\sqrt{n+1}-2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}}, \ \forall k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Longrightarrow 2\sqrt{n+1}-2 < u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$ 2

3) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ $\left(\text{car } u_n > 2\sqrt{n+1}-2, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(2\sqrt{n+1}-2)=+\infty\right)$. 1

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est monotone . On a*

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-2\sqrt{n+1}-u_n+2\sqrt{n} = (u_{n+1}-u_n)-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < 0.$$ 1

D'où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante.*

b) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est minorée. On a*

$$u_n > 2\sqrt{n+1}-2 \Longrightarrow u_n-2\sqrt{n} > 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2 > -2 \Longrightarrow v_n > -2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante et minorée donc elle converge.* 1