Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie
Département du Tronc Commun des Sciences de la Nature
$1^{ère}$ année LMD

2016/2017

Examen de mathématiques

Durée: 01H30

Exercice 1 (6 points)
Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ \\ 1 + x^2 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2) Peut-on prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (8 points)
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x}\, dx.$$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Montrer que

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - (\frac{n+1}{2}) I_n.$$

Exercice 3 (6 points)
Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules rouges et 5 boules jaunes.

1) De combien de façon différentes peut-on tirer successivement et sans remise 3 boules de cette urne?

2) De combien de façon différentes peut-on tirer successivement et avec remise 2 boules rouges et 1 boule blanche?

3) De combien de façon différentes peut-on tirer simultanément 1 boule rouge, 1 boule blanche et 1 boule jaune?

Corrigé de l'examen 1ère année LMD. 2016-2017

$\boxed{\text{Exo 1}}$ 1)

(1) • $D_f = \mathbb{R}^*$

(1) • f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de 2 fcts continues : $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

(1) • f est continue sur $]-\infty,0[$ car c'est un polynôme.

(1) 2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim 1+x^2 = 1 = l$.

(1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = l$

→ Donc f admet un prolongement $\tilde{f}$ au pt $x=0$

(1)
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x > 0 \\ 1+x^2 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Exo 2}}$ $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x}\,dx$

(2) 1) * $I_0 = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \left.\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$.

* $I_1 = \int_0^1 x e^{2x}\,dx$

$$\int_0^1 f g' = f g\Big]_0^1 - \int_0^1 f' g$$

(1) $f(x) = x, \quad g'(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 1, \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

(1) $I_1 = \frac{1}{2}x e^{2x}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$

(1) $I_1 = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right]$. $I_1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$

2) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{2x}\,dx$.

par parties (1) $f(x) = x^{n+1} \quad g'(x) = e^{2x}$

$f'(x) = (n+1)x^n, \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Scanned by CamScanner

1 $I_{n+1} = \frac{1}{2} x^{n+1} e^{2x} \Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1) x^n e^{2x} \, dx$

1 $= \frac{1}{2} e^{2} - 0 - \frac{1}{2}(n+1) \, I_n .$

$I_{n+1} = \frac{1}{2} e^{2} - \frac{(n+1)}{2} I_n .$

$\boxed{\text{Exo } 3}$ 4b 3r 5j

12 1) $n = 12$, $p = 3$ avec ordre, sans répétition A_n^p

$N = A_{12}^3 = \frac{12!}{9!} = 12.11.10. = 1320$ façons

2 2) $n = 12$, $p = 3$ avec ordre avec répétition n^p

$N = 3^2 . 4^1 . 3 = 36 \times 3$ façons $= 108$

3) sans ordre sans répétition C_n^p

2 $N = C_3^1 \, C_4^1 \, C_5^1 = 3.4.5 = 60$ façons

Scanned by CamScanner