Corrigé de rattrapage
$1^{ère}$ année LMD 2016/2017

Exercice 1 :

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}.$$

1°) On a : $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0} (-x^2) \leq \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} x^2$

par conséquent

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$ 01,5

Soit $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Alors $\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) \Rightarrow \tilde{f}$ est continue au point $x=0$. 0,5

Donc, f admet un prolongement par continuité au point $x=0$.

2°) # continuité sur $\mathbb{R}^*$:

On a $\cos\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est la composée de 2 f^{ts} continues sur $\mathbb{R}^*$. Alors, $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit de 2 f^{ts} continues x^2 et $\cos\frac{1}{x}$. 01

continuité au p^t $x=0$; de la $1^{ère}$ question, $\tilde{f}$ est continue en 0. 0,5

Conclusion : $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$; $\cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est la composée de 2 f^{ts} dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Alors, $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit de 2 f^{ts} dérivables x^2 et $\cos\frac{1}{x}$. 01

Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

(en utilisant le même raisonnement que dans la $1^{ère}$ question) 01,5

Conclusion : $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1°) Par identification $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{-3}{4}$. 0,5

2°) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}\,dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}\right) dx = -\frac{3}{8}\left[\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{8}\ln 3$ 02 01

3°) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos x)^3}{1-2\sin x}\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{1-2\sin x}\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1-\sin^2 x}{1-2\sin x}\cos x\,dx$. 0,5

On pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$ 01

$I = \int_{-1}^{0} \frac{t^2-1}{2t-1}\,dt = \frac{3}{8}\ln 3$.

Exercice 3 :

1°) $p(T) = p(T/M)\,p(M) + p(T/\bar{M})\,p(\bar{M})$ 01

$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} + \frac{8}{10} \cdot \frac{99}{100} = 0{,}7930$ 02 01

2°) $p(M/T) = \frac{p(T/M)\,p(M)}{p(T)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}}{0{,}793} = 0{,}0012$

0,5 0,5 01

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie
Département du Tronc Commun des Sciences de la Nature
2016/2017
1ère année LMD

Rattrapage de mathématiques

Durée: 02 Heures

Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x}).$$

1) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\tilde{f}$ le prolongement de f sur $\mathbb{R}$. Etudier la continuité et la dérivabilité de $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (7 points)

1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1} = ax + b + \frac{c}{2x - 1}.$$

2) Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - 1}{2x - 1}\, dx.$$

3) En déduire

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos x)^3}{1 - 2\sin x}\, dx.$$

Exercice 3 (7 points)

Dans une population pour laquelle un habitant sur 100 est atteint d'une maladie génétique M, un laboratoire a mis au point un test de dépistage. Le résultat du test est soit positif (T), soit négatif ($\overline{T}$).

La probabilité qu'un individu non atteint par la maladie présente un test positif est $0,8$ et la probabilité qu'un individu malade présente un test négatif est $0,9$.

1) Un individu, choisi au hasard dans cette population, est soumis au test de dépistage. Quelle est la probabilité que le résultat du test soit positif?

2) Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par la maladie M?