

Examen Algorithmique Avancée

Les calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits. Les téléphones mobiles doivent être éteints et rangés dans les sacs.

Exercice 1.

Question 1) Montrer en détaillant toutes les étapes que $7n + \sqrt{n} + 15 \in \Theta(n)$, avec $n \in \mathbb{R}^{**}$.

Question 2) Etant donné deux fonctions f et g sur \mathbb{R}^{**} , montrer que $\max\{f, g\} \in \Theta(f + g)$.

Question 3) Vous devez choisir parmi ces trois algorithmes suivants; Quelle est la complexité de chacun ? Lequel est le plus rapide?

- A. L'algorithme **A** résout les problèmes de taille n en les divisant en cinq sous-problèmes de taille $n/2$, il résout les sous-problèmes récursivement, et il combine les solutions en temps $O(n)$.
- B. L'algorithme **B** résout les problèmes de taille n en résolvant récursivement deux sous-problèmes de taille $n-1$, il résout les sous-problèmes récursivement, et il combine les solutions en temps $O(1)$.
- C. L'algorithme **C** résout les problèmes de taille n en les divisant en neuf sous-problèmes de taille $n/3$, il résout les sous-problèmes récursivement, et il combine les solutions en temps $O(n^2)$.

Exercice 2.

Soit un algorithme dont la complexité $T(n)$, est donnée par la relation de récurrence ($n \in \mathbb{R}^{**}$):

$$T(1) = 1, \\ T(n) = \alpha T\left(\frac{n}{\beta}\right) + n^\gamma, \quad \text{avec } \alpha > 1, \beta > 1 \text{ et } \gamma > 1.$$

En supposant que $\gamma = \log_\beta \alpha$,

- 1) Calculer $T(n)$ en résolvant en détail la récurrence.
- 2) Déduire la complexité $T(n)$ dans le cas ou $T(1) = 0$.
- 3) Déterminer $T(n)$ à l'aide du théorème maître (justifiez votre réponse).

Exercice 3.

Soit la fonction F (dépendant d'un entier n) suivante :

Fonction F(n)

```

si n=0 alors
    renvoyer 2 ;
sinon
    renvoyer F(n-1)*F(n-1) ;
fin
    
```

1. Que calcule la fonction $F(n)$?
2. Déterminer la complexité de $F(n)$?
3. Montrer comment améliorer la complexité en proposant un algorithme basé sur le paradigme diviser pour régner ?