



Cours Electrotechnique Fondamentale I

Niveau : 2ème année Licence
Electrotechnique-Electromécanique

Dr. Ahmed KASDI
Maître de conférences



Table des matières

	Pages
INTRODUCTION GÉNÉRALE	01
<u>Chapitre 1 - Courant alternatif monophasé</u>	
I.1 INTRODUCTION	02
I.2 COURANT ALTERNATIF MONOPHASÉ	02
I.2.1 Importance du régime sinusoïdal	02
I.2.2 Production du courant alternatif sinusoïdal	02
I.3 REPRÉSENTATION DES FONCTIONS SINUSOÏDALES	04
I.3.1 Définitions	04
I.3.2 Exemple	06
I.4 REPRÉSENTATION DE FRESNEL DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES	06
I.4.1 Définition	06
I.4.2 Représentation de Fresnel de deux signaux	07
I.4.3 Représentation de Fresnel de plusieurs signaux	08
I.5 PUISSANCES EN RÉGIME SINUSOÏDAL	09
I.5.1 Puissance instantanée	09
I.5.2 Puissance active	10
I.5.3 Puissance réactive	10
I.5.4 Puissance apparente	10
I.5.5 Triangle de puissance	11
I.6 FACTEUR DE PUISSANCE	11
I.6.1 Définition	11
I.6.2 Cas particulier du régime sinusoïdal	11
I.7 THÉORÈME DE BOUCHEROT	11
I.7.1 Définition	11
I.7.2 Exemple d'application	12
I.8 RELÈVEMENT DU FACTEUR DE PUISSANCE	12
I.8.1 Importance du $\cos\varphi$	12
I.8.2 Inconvénients d'un mauvais facteur de puissance	13
I.8.3 Moyens de diminution de la puissance réactive	13
I.8.4 Méthode d'amélioration du facteur de puissance	14
<u>Chapitre 2 – Les dipôles passifs linéaires</u>	
II.1 INTRODUCTION	16
II.2 DIPÔLE PASSIF LINÉAIRE	16
II.3 NOTION D'IMPÉDANCE	16
II.4 LOI D'OHM	16
II.5 APPLICATION DE LA LOI D'OHM	17
II.5.1 Conducteur ohmique	17
II.5.2 Bobine parfaite	17
II.5.3 Condensateur parfait	18
II.5.4 Dipôle R, L série (Bobine réelle)	19
II.5.5 Dipôle R, C série	20
II.5.6 Dipôle R, L, C série	21
II.5.7 Dipôle R, C parallèle (Condensateur réel)	22
II.5.8 Dipôle R, L, C parallèle	23

<u>Chapitre 3 – Notation complexe des grandeurs électriques</u>	
III.1 INTRODUCTION	24
III.2 RAPPELS SUR LES NOMBRES COMPLEXES	24
III.2.1 Module et argument	24
III.2.2 Représentation graphique d'un nombre complexe	24
III.2.3 Différentes formes	25
III.2.4 Relations remarquables	25
III.2.5 Complexe conjugué	25
III.2.6 Propriétés des opérations entre nombres complexes	25
<i>III.2.6.1 Addition (ou soustraction).</i>	25
<i>III.2.6.2 Produit</i>	26
<i>III.2.6.3 Division</i>	26
III.3 REPRÉSENTATION COMPLEXE DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES	26
III.3.1 Représentation d'une tension	27
III.3.2 Représentation d'un courant	27
III.3.3 Représentation d'une impédance	27
III.3.4 Puissance électrique en complexe	27
III.4 APPLICATION DES COMPLEXES EN ÉLECTRICITE	28
III.4.1 Loi d'Ohm	28
<i>III.4.1.1 Loi d'Ohm pour un conducteur ohmique</i>	28
<i>III.4.1.2 Loi d'Ohm pour une inductance</i>	29
<i>III.4.1.3 Loi d'Ohm pour un condensateur</i>	29
III.4.2 Associations de dipôles – Impédances équivalentes	30
<i>III.4.2.1 Association série</i>	30
<i>III.4.2.2 Association parallèle</i>	30
III.4.3 Exemples d'application	31
<i>III.4.3.1 Dipôle R, L série (Bobine réelle)</i>	31
<i>III.4.3.2 Dipôle R, L, C série</i>	31
<i>III.4.3.3 Dipôle R, L, C parallèle</i>	31
<u>Chapitre 4 - Courant alternatif triphasé</u>	
IV.1 INTRODUCTION	32
IV.2 INTÉRÊT DU SYSTÈME TRIPHASÉ	32
IV.2.1 Exemple explicatif	32
IV.2.2 Définitions :	33
IV.3 ÉTUDE DES TENSIONS DÉLIVRÉES	33
IV.3.1 Tension simples	33
<i>IV.3.1.1 Représentation temporelles</i>	33
<i>IV.3.1.2 Représentation vectorielle de Fresnel</i>	34
<i>IV.3.1.3 Représentation complexe d'un système triphasé de tension</i>	35
IV.3.2 Tension entre phases	35
<i>IV.3.2.1 Définitions</i>	35
<i>IV.3.2.2 Relation entre les tensions simples et les tensions composées</i>	35

IV.4 COUPLAGE D'UN RÉCEPTEUR TRIPHASÉ ÉQUILIBRÉ	37
IV.4.1 Récepteur triphasé	37
IV.4.2 Modes de couplage du récepteur triphasé	38
<i>IV.4.2.1 Disposition ou couplage étoile</i>	38
<i>IV.4.2.2 Disposition ou couplage triangle</i>	40
IV.5 PUISSANCE ÉLECTRIQUE EN TRIPHASÉ	43
IV.5.1 Puissance instantanée	43
IV.5.2 Expressions des puissances en fonction du mode de couplage	44
<i>IV.5.2.1 Couplage en étoile de la charge</i>	44
<i>IV.5.2.2 Couplage en triangle de la charge</i>	44
IV.5.3 Théorème de Boucherot	45
IV.5.4 Facteur de puissance	45
IV.5.5 Relèvement du facteur de puissance	45
<i>IV.5.5.1 Couplage des condensateurs en étoile</i>	46
<i>IV.5.5.2 Couplage des condensateurs en triangle</i>	47
IV.6 RÉSEAU TRIPHASÉ NON SYMÉTRIQUE	48
IV.6.1 Conséquence du déséquilibre sur une charge montée en étoile	48
<i>IV.6.1.1 Cas où le neutre est relié</i>	48
<i>IV.6.1.2 Cas où le neutre n'est pas relié</i>	49
IV.6.2 Conséquence du déséquilibre sur une charge montée en triangle	50
 <u>Chapitre 5 - Mesure de puissance</u> 	
V.1 INTRODUCTION	51
V.2 MÉTHODE VOLTAMPÈREMÈTRIQUE	51
V.3 MESURE DE PUISSANCE ACTIVE – LE WATTMÈTRE –	51
V.4 MESURE DE PUISSANCE EN TRIPHASÉ	53
V.4.1 Méthode des trois wattmètres – Ligne à 04 fils	53
V.4.2 Méthode des deux wattmètres – Ligne à 03 fils	54
V.5 MESURE DE LA PUISSANCE RÉACTIVE	55
 <u>Bibliographie</u> 	
	57

Introduction Générale

Introduction Générale

L'électrotechnique est la science ou la discipline qui étudie les applications pratiques de l'électricité comme la production, le transport, la distribution, la transformation, la gestion et l'utilisation de l'énergie électrique, etc.

Ce cours s'adresse aux étudiants de deuxième année LMD (Domaine Sciences et Technologies) des filières ; Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunication et Electromécanique. Le but de l'enseignement de l'électrotechnique fondamentale est de familiariser les étudiants avec des notions de base qui sont propres au domaine du génie électrique.

Ce manuscrit est présenté en cinq chapitres. Nous avons consacré le premier au courant alternatif monophasé. On y décrit principalement l'origine du courant alternatif, la représentation vectorielle de Fresnel des grandeurs électriques, la puissance électrique au régime sinusoïdal ainsi que la compensation de l'énergie réactive.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons la loi d'Ohm au régime alternatif sinusoïdal et son application sur les dipôles passifs linéaires.

Dans le Chapitre trois, après un bref rappel sur les nombres complexes et leurs principales propriétés, nous passerons en revue l'utilisation de la notation complexe des grandeurs électriques.

Le quatrième chapitre traite le courant alternatif triphasé. On y développe entre autres, l'intérêt de ce système, la notion de grandeur simple et composée et les différents modes de couplage des récepteurs.

Le dernier chapitre est quant à lui consacré à la mesure des puissances électriques en régime alternatif monophasé et triphasé.

Chapitre I

Courant alternatif monophasé

I.1 INTRODUCTION

Il existe deux types de systèmes disponibles dans les circuits électriques ; le système monophasé et le système triphasé. Dans le circuit dit monophasé, il n'y a qu'une seule phase, dans ce cas là, le courant circule à travers un seul fil (*phase*), le retour du courant est assuré par un autre fil appelé fil *neutre*. Dans les vieux systèmes d'antan, les sources de tension et les charges (récepteurs) sont de type monophasé. Le système polyphasé fut inventé dans les années 1880 où plus d'une phase est utilisée pour générer, transmettre et alimenter un système de charge.

I.2 COURANT ALTERNATIF MONOPHASÉ

I.2.1 Importance du régime sinusoïdal

L'importance du régime sinusoïdal vient d'une part du fait que la plus grande partie de l'énergie électrique est produite puis transportée sous forme de courant alternatif sinusoïdal , et d'autre part de la possibilité de décomposer toute fonction périodique, quelle que soit sa forme, en une somme de signaux sinusoïdaux (théorème de Fourier).

I.2.2 Production du courant alternatif sinusoïdal

La loi de Faraday-Lenz est à la base de fonctionnement de tous les générateurs de courant alternatif ; un circuit électrique fermé (une spire, une bobine,..) est le siège d'une force électromotrice (*f.é.m.*) induite lorsqu'il est traversé par un flux magnétique ϕ (issu d'une induction magnétique \mathbf{B}) variable au cours du temps :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{I.01})$$

La figure I.1 illustre le principe de fonctionnement d'un générateur de courant alternatif. Une spire tournant à la vitesse angulaire ω dans un champ magnétique \mathbf{B} (ici \mathbf{B} peut être constant mais Φ est variable à travers la section de la spire) est le siège d'une *f.é.m.* induite. Le courant induit est acheminé vers le circuit extérieur par un système de bagues collectrices et de balais.

La visualisation de la tension induite montre qu'il s'agit d'un signal alternatif périodique symétrique dont la forme mathématique est celle de la fonction *sinus* qui peut s'écrire :

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{I.02})$$

On montre sur la [figure I.2](#) un cycle de la tension induite sous forme d'une onde sinusoïdale. Chaque cycle se compose d'une alternance positive et d'une alternance négative

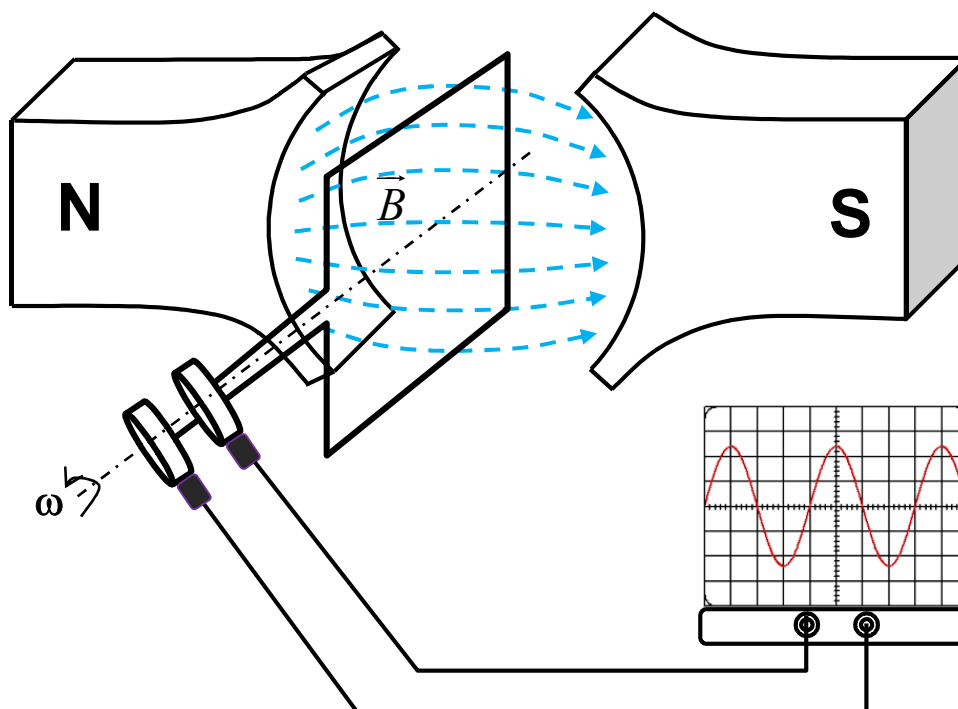


Figure I.1 : Principe de fonctionnement d'un générateur de courant alternatif

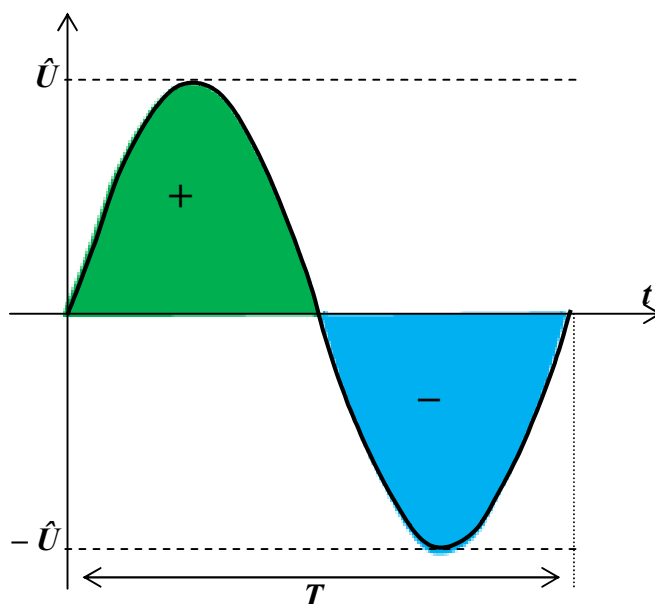


Figure I.2 : Forme d'une onde sinusoïdale

I.3 REPRÉSENTATION DES FONCTIONS SINUSOÏDALES

I.3.1 Définitions

➤ **Valeur instantanée :**

Une tension sinusoïdale est une grandeur périodique et alternative pouvant s'écrire sous la forme :

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \theta_u) \quad (\text{I.03})$$

t est le temps en secondes (s)

ω est la pulsation en radians par seconde ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ;

$\omega t + \theta_u$ est la phase instantanée en radians (rad) ;

θ_u est la phase à l'origine en radians (rad).

U_M est la valeur crête du signal

Remarque : On peut de la même façon utiliser une fonction *cosinus* plutôt qu'une fonction *sinus* pour représenter un signal électrique. En effet ;

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \theta_u) = U_M \cos(\omega t + \theta_u - \frac{\pi}{2}) = U_M \cos(\omega t + \delta_u) \quad (\text{I.04})$$

➤ **Valeur crête ou amplitude U_M :**

Valeur maximale du signal, notée aussi \hat{U} ou U_{\max} .

➤ **Valeur moyenne :**

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal à travers une période est:

$$\langle u \rangle = U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = 0 \quad (\text{I.05})$$

car il s'agit d'une fonction alternative.

➤ **Valeur efficace :**

La valeur efficace d'une tension (ou d'un courant) sinusoïdale correspond à la quantité de tension continue U (ou de courant I) qui produirait un échauffement identique dans une résistance (même puissance dissipée).

Démonstration : Soit une résistance R parcourue par un courant continu I . La puissance dissipée dans cette résistance est alors :

$$P_{cc} = U \times I = U^2 / R \quad (\text{I.06})$$

En courant alternatif (AC), la puissance dissipée dans la résistance est variable :

$$p(t)_{CA} = u(t) \times i(t) = \frac{u(t)^2}{R} \quad (\text{I.07})$$

La puissance moyenne dissipée sur une période T est alors :

$$\langle p(t) \rangle = P_{CA} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u(t)^2}{R} dt \quad (\text{I.08})$$

En faisant égaliser ces deux puissances :

$$P_{cc} = P_{CA} \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u(t)^2}{R} dt = \frac{U^2}{R} \quad (\text{I.09})$$

$$\Rightarrow U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt \Rightarrow U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt} \quad (\text{I.10})$$

D'où l'expression de la valeur efficace d'un signal périodique s quelconque :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} \quad (\text{I.11})$$

Et pour le cas de la grandeur sinusoïdale $u(t)$:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_M \sin(\omega t + \theta_u))^2 dt}$$

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \quad (\text{I.12})$$

Remarque :

- La valeur efficace (vraie) de n'importe quelle tension (pas forcément sinusoïdale) se mesure à l'aide d'un voltmètre numérique, *RMS* (de l'anglais *Root Mean Square*, moyenne quadratique), en position AC + DC.
- Un voltmètre non *RMS* indique uniquement la valeur efficace d'une tension sinusoïdale (en position AC).
- Par convention, dans l'écriture d'une grandeur efficace, l'indice '*eff*' est omis volontairement. Par contre, on doit préciser s'il s'agit d'une valeur maximale ou moyenne.

N.B. : La tension efficace fournie aux prises murales intérieures en Algérie est $V_{eff} = 230$ V à une fréquence $f=50$ Hz.

➤ **Période :**

La fonction sinus est périodique dans le temps. Cela signifie que la valeur de la tension à l'instant t sera exactement la même à un instant ultérieur $t' = t + T$, où T est la période.

Cela conduit à : $T\omega = 2\pi$, donc : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [unité seconde, s]

L'inverse de la période est appelée fréquence : $f = 1 / T$ [unité s^{-1} ou hertz, Hz].

On écrit alors : $\omega = 2\pi f$

I.3.2 Exemple

Soit le signal : $u(t) = 14.142 \sin(378t + 0.52)$

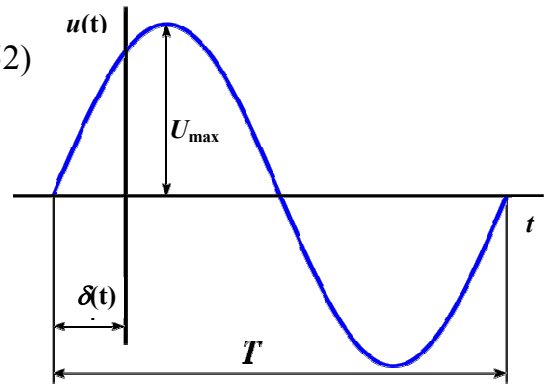
De cette fonction, on peut déduire :

$$\omega = 378 \text{ rad/s}$$

$$f = \omega/2\pi = 60 \text{ Hz} \Rightarrow T = 1/f = 16.66 \text{ ms}$$

$$\theta_u = 0.52 \text{ rad} \rightarrow \theta_u = 30^\circ$$

$$U_M = 14.142 \rightarrow U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} = 10$$

**I.4 REPRÉSENTATION DE FRESNEL DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES****I.4.1 Définition**

La représentation de *Fresnel* est une représentation graphique des grandeurs électriques sinusoïdales. C'est un outil graphique permettant d'effectuer les différentes opérations s'effectuant sur les fonctions sinusoïdales de même fréquence comme l'addition, la soustraction, la dérivation et l'intégration. Dans cette représentation, on associe à toute grandeur électrique $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \theta)$ un vecteur \vec{V} qui tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'origine, fig. I.3. A chaque instant, la grandeur sera égale à la projection du vecteur sur un axe de référence.

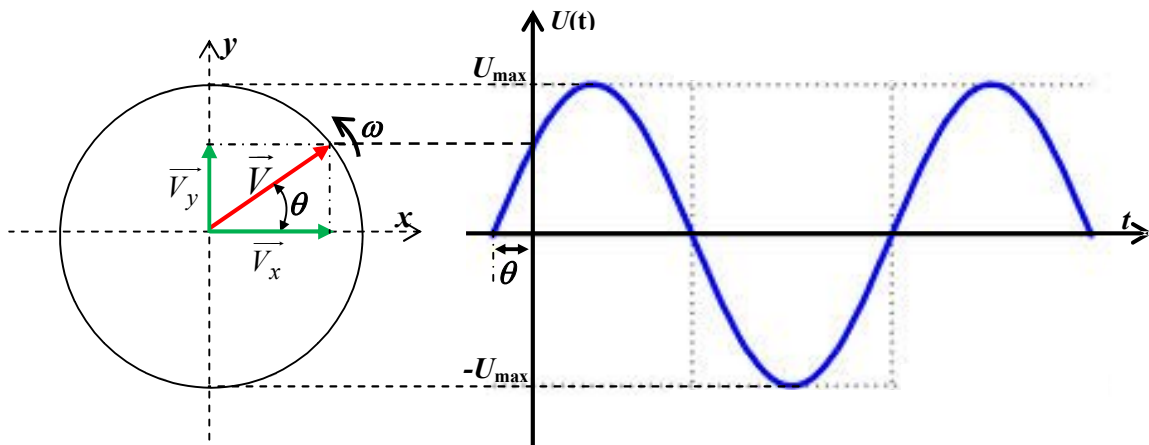


Figure I.3 : Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

Dans l'exemple ci-dessus la grandeur sinusoïdale est représentée par la projection du vecteur \vec{V} sur l'axe des y ;

$$V_y = V \sin(\omega t + \theta) \quad (\text{I.13})$$

Remarque : Une grandeur électrique peut aussi être représentée par la fonction *cosinus*.

Exemple : $i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i)$

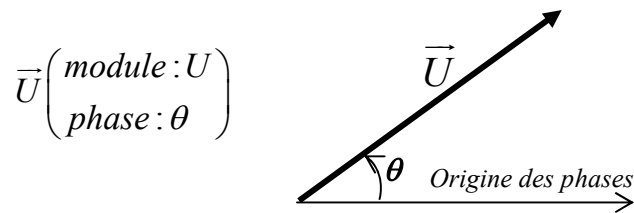
Dans ce cas, cette grandeur est représentée par la projection du vecteur \vec{V} sur l'axe des x ;

$$V_x = V \cos(\omega t + \theta_i) \quad (\text{I.14})$$

Remarque :

Dans la construction de Fresnel, lorsque plusieurs grandeurs électriques (de même fréquence) sont à représenter il n'est pas nécessaire de représenter leurs phases instantanées, car les vecteurs tournent tous à la même vitesse ω (constante). Par conséquent, on représentera tous les vecteurs au même instant donné (à $t=0$ plus simplement). Dans ce cas, pour représenter une grandeur électrique (courant ou tension), il suffira de construire un vecteur de longueur proportionnelle à sa valeur efficace (U ou I) et faisant un angle θ avec l'axe choisi comme origine des phases.

La grandeur électrique $u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \theta)$ sera donc représentée par le vecteur :

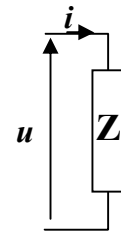
**I.4.2 Représentation de Fresnel de deux signaux**

Considérons un dipôle Z auquel on applique une tension u :

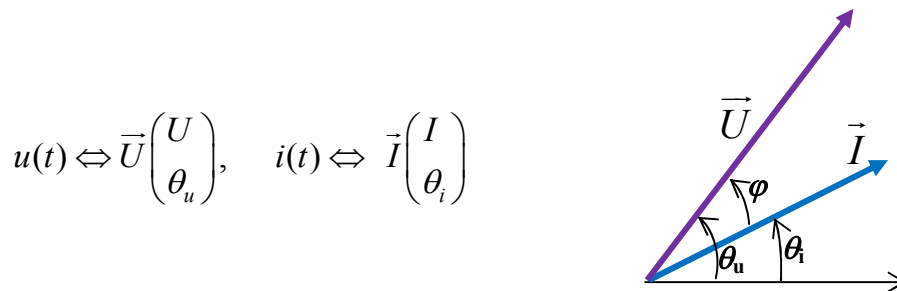
$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u),$$

un courant i va alors circuler dans ce dipôle ;

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i)$$



La **représentation de Fresnel** correspondant à ces deux fonctions sinusoïdales est :



Selon la **nature** du dipôle Z , une différence de phase (φ) peut exister entre les deux vecteurs, elle est définie ici par : $\varphi = \theta_u - \theta_i$.

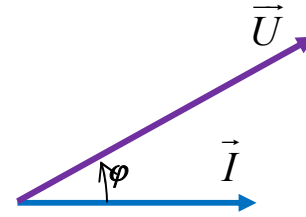
Par convention, φ est l'angle allant de i vers u et représente le **déphasage** de i par rapport à u . Il dépend du dipôle et de la pulsation ω .

On peut simplifier cette représentation en prenant comme origine des phases l'un des deux vecteurs ;

a- Courant I origine des phases ($\theta_i = 0$) :

On écrira alors : $i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t)$
 $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$

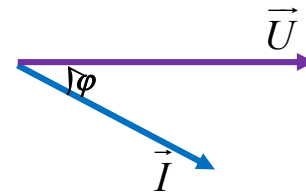
$\Rightarrow \varphi = \theta_u - \theta_i = \theta_u$



b- Tension U origine des phases ($\theta_u = 0$) :

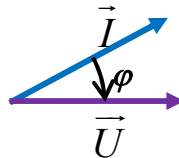
On écrira alors : $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$
 $i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$

$\Rightarrow \varphi = \theta_u - \theta_i = -\theta_i$

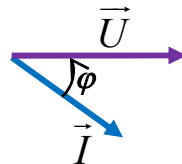


Remarque : comme $\varphi = \theta_u - \theta_i$ alors :

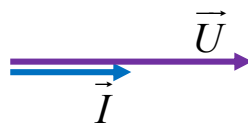
- ❖ si $\varphi < 0$ ($\theta_u < \theta_i$), i est en avance (**AV**) sur u ; la charge est de nature capacitive ;



- ❖ si $\varphi > 0$ ($\theta_u > \theta_i$), i est en retard (**AR**) sur u ; la charge est de nature inductive ;



- ❖ si $\varphi = 0$ ($\theta_u = \theta_i$), i et u sont en phase ; la charge est de nature résistive ;



I.4.3 Représentation de Fresnel de plusieurs signaux

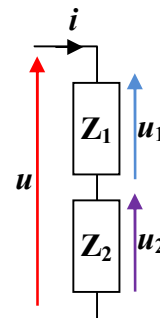
Soient deux dipôles Z_1 et Z_2 associés en série et auxquels on applique une tension u ;

Loi des mailles donne : $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$

On pose ;

$$u_1(t) = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \theta_1)$$

$$u_2(t) = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

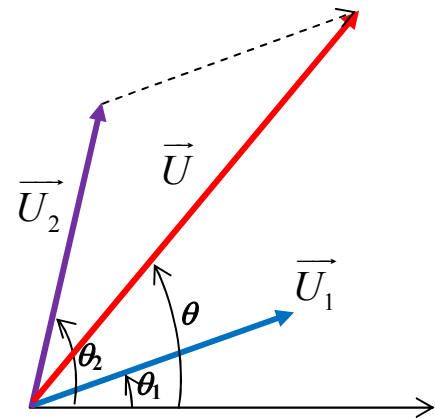


La représentation de Fresnel de u_1 et u_2 permet de trouver leur résultante u , tel que ;

$$u_1(t) \Leftrightarrow \vec{U}_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad u_2(t) \Leftrightarrow \vec{U}_2 \begin{pmatrix} U_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2}$$

avec $u(t) \Leftrightarrow \vec{U} \begin{pmatrix} U \\ \theta \end{pmatrix}$



On remarque que le module du vecteur résultant \vec{U} est différent de la somme des modules des vecteurs \vec{U}_1 et \vec{U}_2 ; $\boxed{\|\vec{U}\| \neq \|\vec{U}_1\| + \|\vec{U}_2\|}$



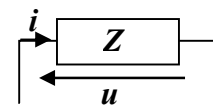
La valeur efficace (U) de la somme de deux signaux électriques est différente de la somme algébrique de leurs valeurs efficaces U_1 et U_2 : $\boxed{U \neq U_1 + U_2}$

I.5 PUISSANCES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Soient les expressions de la tension u et du courant i d'un dipôle Z ;

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t) \quad (i \text{ pris comme origine des phases})$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$



I.5.1 Puissance instantanée

On définit la puissance électrique instantanée comme étant le produit de la tension par le courant ;

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \times i(t) \\ &= U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \times I\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ &= 2UI \sin(\omega t + \varphi) \times \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{I.15}$$

En utilisant la relation trigonométrique : $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$,

l'expression de la puissance devient :

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2UI}{2} [\cos(\omega t + \varphi - \omega t) - \cos(\omega t + \varphi + \omega t)] \\ p(t) &= U \cdot I \cos(\varphi) - U \cdot I \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{I.16}$$

L'expression finale de la puissance instantanée est composée d'un terme constant " $U \cdot I \cdot \cos\varphi$ " et d'un terme variable " $U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$ ".

I.5.2 Puissance active

La puissance active est la moyenne de la puissance instantanée :

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t).dt \quad (\text{I.17})$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U.I [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)].dt$$

Comme le terme variable ($U.I.\cos(2\omega t + \varphi)$) est une fonction périodique alternative, sa valeur moyenne est nulle. Il ne reste que le terme constant ; $U.I.\cos(\varphi)$,

$$\Rightarrow P = UI \cos(\varphi) \quad (\text{I.18})$$

U : valeur efficace de la tension (V) ;

I : valeur efficace du courant (A) ;

φ : déphasage entre u et i (rad).

P : puissance active en watt (W).

I.5.3 Puissance réactive

La puissance réactive est une puissance imaginaire inventée mathématiquement dans le but de faciliter les calculs, elle n'est donc pas une puissance réelle (au sens mécanique du terme). On la trouve dans les systèmes ayant des composants réactifs (capacités ou inductances). Elle s'exprime :

$$Q = UI \sin(\varphi) \quad (\text{I.19})$$

Unité : le voltampère réactif (var)

Le signe de Q dépend du déphasage φ qui lui-même dépend de la nature du dipôle ;

$$\text{Si } \varphi \begin{cases} > 0, \text{ alors } Q > 0, \text{ consommation (circuit inductif)} \\ < 0, \text{ alors } Q < 0, \text{ production (circuit capacitif)} \end{cases}$$

I.5.4 Puissance apparente

La puissance apparente ne tient pas compte du déphasage entre u et i .

$$S = UI \quad (\text{I.20})$$

Unité : le voltampère (VA).

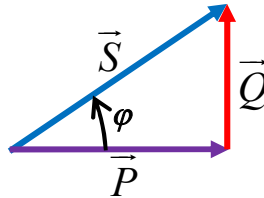
Cette grandeur n'a pas de signification physique. Elle a la même expression que celle de la puissance développée par un circuit continu, de là, le terme de puissance "apparente". Elle est utilisée pour quantifier la puissance maximale que peut délivrer un transformateur.

I.5.5 Triangle de puissance

En observant les relations ci-dessus (I.17-19) on constate que :

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (\text{I.21})$$

Ce qui peut être schématisé par le diagramme de Fresnel des puissances (*triangle des puissances*) :



I.6 FACTEUR DE PUISSANCE

I.6.1 Définition : Le facteur de puissance est le rapport entre la puissance active et la puissance apparente :

$$k = \frac{P}{S} \quad (\text{Sans dimension}) \quad (\text{I.22})$$

I.6.2 Cas particulier du régime sinusoïdal

$$k = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi \quad (\text{I.23})$$

**En régime sinusoïdale le facteur de puissance est : $\cos(\varphi)$
Le facteur de puissance est maximal (FP = 1) pour une résistance pure**

I.7 THÉORÈME DE BOUCHEROT

I.7.1 Définition : En régime alternatif sinusoïdal, la puissance totale (active/réactive) consommée par une installation électrique comportant plusieurs dipôles est égale à la somme des puissances (active/réactive) consommées par chaque dipôle.

$$P_{Tot} = \sum_i^n P_i \quad \text{et} \quad Q_{Tot} = \sum_i^n Q_i \quad (\text{I.24})$$

Avec n le nombre de dipôles.

Les puissances actives et réactives sont conservées

Le théorème de Boucherot ne s'applique pas à la puissance apparente $S_{Tot} \neq \sum_i^n S_i$

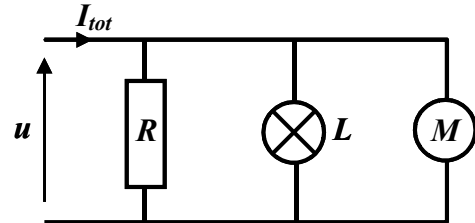
$$S_{Tot} = \sqrt{P_{Tot}^2 + Q_{Tot}^2}$$

Remarque : Le théorème de Boucherot est valable quelque soit le groupement des récepteurs, série ou parallèle

1.7.2 Exemple d'application

Soit une installation électrique comportant trois récepteurs :

- Une résistance avec : $P_R=740 \text{ W}$
- Une lampe avec : $P_L=60 \text{ W}$
- Un moteur électrique avec : $\begin{cases} P_M = 3 \text{ kW} \\ Q_M = 2.4 \text{ k var} \end{cases}$



Le tableau suivant donne le bilan de puissance de l'installation:

Récepteur	P_i	Q_i
1	740 W	0 (résistif)
2	60 W	0 (résistif)
3	3000 W	2400 var
Total	$\sum P_i = 3800 \text{ W}$	$\sum Q_i = 2400 \text{ var}$

Une fois les puissances active et réactive totales calculées, on passe au calcul de la puissance apparente :

$$\Rightarrow S_{Tot} = \sqrt{P_{Tot}^2 + Q_{Tot}^2} = \sqrt{3800^2 + 2400^2} = 4495 \text{ VA}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_{global} = \frac{P_{Tot}}{S_{Tot}} = \frac{3800}{4495} = 0.845$$

$$\text{Si } U=220 \text{ V, } \Rightarrow I_{Tot} = \frac{P_{Tot}}{U \times \cos \varphi_{global}} = \frac{3800}{220 \times 0.845} = 20.8 \text{ A}$$

1.8 RELÈVEMENT DU FACTEUR DE PUISSANCE

1.8.1 Importance du $\cos \varphi$

Pour des raisons économiques, une installation électrique industrielle doit consommer le moins d'énergie possible. Cela passe par la réduction des pertes, en particulier les pertes joules et les chutes de tension dépendant du courant.

Si R est la résistance totale des câbles composant la ligne électrique, alors les pertes joules dans cette ligne s'expriment par : $\Delta P_j = R \times I^2$

L'installation électrique absorbe la puissance active : $P = UI \cos \varphi$ (à satisfaire car demandée par l'ensemble des récepteurs).

Le courant appelé par la charge est alors : $I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$

Comme la tension U est imposée par le réseau (constante), la diminution du courant passe inévitablement par l'augmentation du facteur de puissance. Il faut donc avoir ' $\cos(\varphi)$ ' le plus proche possible de 1.

1.8.2 Inconvénients d'un mauvais facteur de puissance :

Un facteur de puissance faible (donc mauvais) implique les conséquences néfastes suivantes :

- Augmentation des pertes Joules et de la chute de tension.
- Augmentation des surcharges au niveau du transformateur et des câbles.
- Sur dimensionnement des conducteurs et des câbles.
- Déclenchement des disjoncteurs.
- Pénalités par le fournisseur d'énergie électrique (SONELGAZ).

On vient de voir que le courant absorbé par une installation est d'autant plus faible que ' $\cos(\varphi)$ ' est grand.

$$\text{Comme : } \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}},$$

plus Q est faible, plus $\cos(\varphi)$ est grand et se rapproche de 1.

L'augmentation ou le relèvement du facteur de puissance est obtenu par la diminution de la puissance réactive consommée par l'installation

1.8.3 Moyens de diminution de la puissance réactive

Pour diminuer la puissance réactive totale (Q) d'une l'installation électrique il faut joindre à cette dernière un composant pouvant modifier Q sans modifier la puissance active P . Ces composants sont soit le condensateur soit la bobine parfaite.

➤ Cas 1 : l'installation électrique est **inductive** ($Q > 0$) :

Pour diminuer Q il faut lui joindre des condensateurs qui apporteront une puissance réactive négative ($Q_c < 0$) de telle sorte que : $Q + Q_c = Q' < Q$.

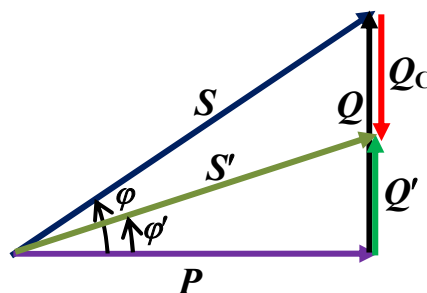


Figure 1.4 : Amélioration du FP par l'ajout de condensateurs

➤ Cas 2 : l'installation électrique est **capacitive** ($Q < 0$) :

Pour augmenter Q il faut lui joindre des inductances qui apporteront une puissance réactive positive ($Q_L > 0$) de telle sorte que : $Q + Q_L = Q' > Q$.

Remarque : Selon l'importance de la puissance réactive apportée (Q_L), on peut améliorer le facteur de puissance en gardant la nature capacitive de l'installation (cas a ; Q_L faible, $\phi' < 0$), comme on peut apporter une grande quantité de puissance réactive permettant d'améliorer le facteur de puissance et rendre l'installation inductive (cas b ; Q_L forte, $\phi' > 0$).

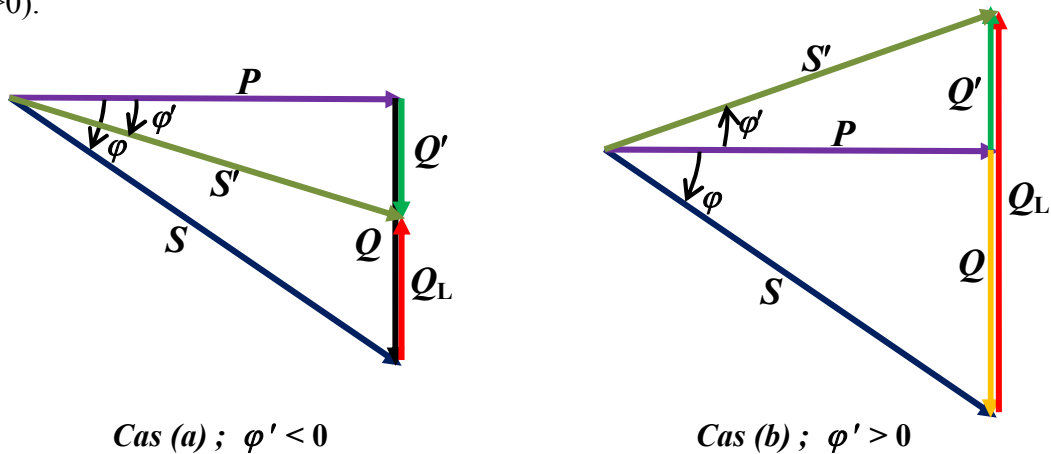


Figure 1.5 : Amélioration du FP par l'ajout d'inductances

1.8.4 Méthode d'amélioration du facteur de puissance

La plupart des installations électriques sont inductives (transformateurs, moteurs, éclairage, ...), donc consomment de l'énergie réactive ($Q > 0$). Pour améliorer leur facteur de puissance on doit y installer en parallèle un condensateur ou une *batterie* de condensateurs (plusieurs condensateurs). Le condensateur va produire la puissance réactive Q_C permettant de diminuer la puissance réactive initiale Q_1 en une puissance réactive Q_2 (valeur diminuée souhaitée). On doit dimensionner le condensateur en fonction du facteur de puissance recherché. Le tableau ci-dessous résume les deux situations ; initiale (Charge seule) et modifiée (Charge + condensateur).

	Charge seule	Charge + Condensateur
Puissance active	P	$P' = P$
Puissance réactive	$Q = P \tan(\phi)$	$Q' = Q + Q_C = P \tan(\phi')$

D'après le tableau ci-dessus, on peut faire le bilan des puissances suivant :

$$Q' = Q + Q_c = P \operatorname{tg}(\varphi) + Q_c = P \operatorname{tg}(\varphi')$$

$$\Rightarrow Q_c = P \operatorname{tg}(\varphi') - P \operatorname{tg}(\varphi) = P (\operatorname{tg}(\varphi') - \operatorname{tg}(\varphi))$$

$$\text{Avec : } Q_c = UI_c \sin(\varphi_c) = UI_c \sin(-\pi/2) = -UI_c = -U \left(\frac{U}{X_c} \right) = -\frac{U^2}{X_c} = -\frac{U^2}{1/C\omega} = -C\omega U^2$$

$$\Rightarrow -C\omega U^2 = P \operatorname{tg}(\varphi') - P \operatorname{tg}(\varphi)$$

$$\text{Finalement : } C = \frac{P (\operatorname{tg}(\varphi) - \operatorname{tg}(\varphi'))}{\omega U^2} \quad (\text{I.25})$$

Remarque :

Le fournisseur d'énergie électrique (SONELGAZ : <http://www.sdc.dz/spip.php?article95>) a fixé un seuil au delà duquel il facture la puissance réactive trop consommée. Ce seuil est calculé à partir de $\tan(\varphi)$:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{Q \text{ (puissance réactive kvar)}}{P \text{ (puissance active kW)}} = \frac{W_r \text{ (énergie réactive consommée [kvarh])}}{W_a \text{ (énergie active consommée [kWh])}} \quad (\text{I.26})$$

$$\text{Bonification (réductions) si : } W_r < \frac{W_a}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\varphi) < 0.5 \quad (\cos(\varphi) > 0.9)$$

$$\text{Majoration (pénalités) si : } W_r > \frac{W_a}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\varphi) > 0.5 \quad (\cos(\varphi) < 0.9)$$

$$\text{Ni bonification ni majoration si : } W_r = \frac{W_a}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\varphi) = 0.5 \quad (\cos(\varphi) \approx 0.9)$$

Chapitre II

Les dipôles passifs linéaires

II.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, on s'est intéressé à l'origine du courant alternatif sinusoïdal et à ses représentations instantanée et vectorielle. Nous allons à présent étudier les différentes relations et lois régissant les grandeurs sinusoïdales lorsqu'elles sont appliquées à des circuits électriques élémentaires. Nous commencerons par définir ce qu'est un dipôle linéaire passif et introduire la notion d'impédance d'un dipôle, puis verrons l'application de la loi d'Ohm sur des dipôles de différente nature.

II.2 DIPÔLE PASSIF LINÉAIRE

Un dipôle passif est un récepteur électrique possédant deux bornes de connexion. Il est dit passif car ne pouvant pas générer de l'énergie électrique par lui-même. En convention récepteur, la puissance électrique reçue par un dipôle passif est positive. Les dipôles passifs linéaires présentent une caractéristique $V(I)$ linéaire passant par l'origine.

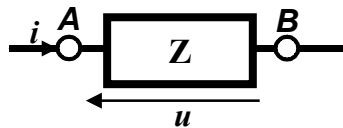


Figure II.1 : Dipôle passif linéaire

II.3 NOTION D'IMPÉDANCE

En régime continu, le passage de courant dans un conducteur se manifeste par une opposition appelée résistance électrique (souvent notée R et exprimée en ohm $[\Omega]$) qui est une caractéristique du matériau composant le conducteur. De même, tout dipôle parcouru par un courant alternatif présente une résistance. Dans ce cas, la résistance au passage du courant dépend de la nature du dipôle (résistif, capacitif, inductif) et de la fréquence du signal. En alternatif, cette résistance est appelée *Impédance* (désignée par la lettre Z) et son unité de mesure est aussi l'ohm $[\Omega]$.

II.4 LOI D'OHM

C'est une loi physique liant l'intensité du courant électrique traversant un dipôle électrique Z à la tension entre ses bornes ;

$$\begin{array}{l} U = Z \times I \\ \text{[V]} \quad \text{[\Omega]} \quad \text{[A]} \end{array} \quad (\text{II.1})$$

Avec $Z = \frac{U}{I}$ l'impédance réelle du dipôle exprimée en ohm $[\Omega]$.

Autre formule : $I = \frac{1}{Z} \times U = Y \times U$

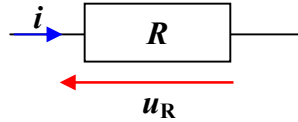
Où $Y = \frac{1}{Z}$ est l'admittance réelle du dipôle exprimée en *Siemens* $[S = \Omega^{-1}]$

II.5 APPLICATION DE LA LOI D'OHM

L'application de la loi d'ohm, en régime variable, sur différents dipôles passifs (résistance, inductance et condensateur) permet de déterminer l'impédance de chaque type de ces dipôles.

Soit : $i(t) = I_M \sin(\omega t)$

II.5.1 Conducteur ohmique



$$u_R(t) = R.i(t) = R.I_M \sin(\omega t) = (R.I)\sqrt{2} \sin(\omega t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + 0^\circ) \quad (\text{II.2})$$

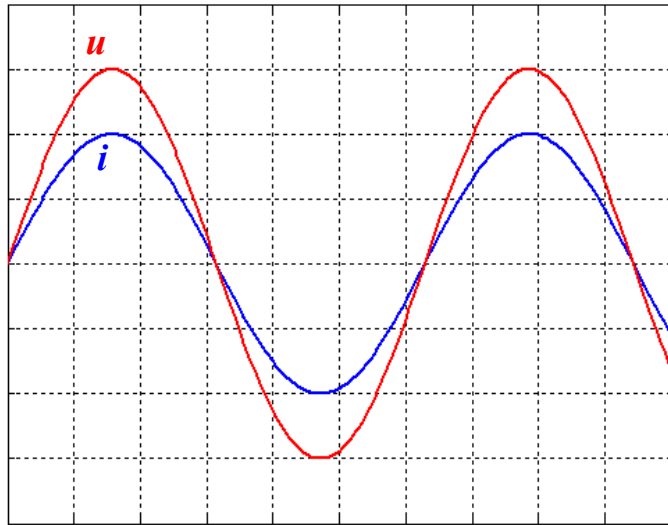


Figure II.2: Courant et tension dans une résistance

Le courant i et la tension u sont en phase : $\varphi = 0^\circ$

Le rapport $Z = \frac{U}{I} = R$ est l'impédance réelle du dipôle (la résistance)

Construction de Fresnel

$$\vec{U}_R = R\vec{I}$$

$$\vec{u}_R \Leftrightarrow (U_R, 0) \quad \text{avec } U_R = R.I$$

$$\vec{i} \Leftrightarrow (I, 0)$$

II.5.2 Bobine parfaite



$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = L\omega I_M \cos(\omega t) = (L\omega.I)\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2) \\ &= U\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Le courant i est en quadrature retard sur la tension u : $\varphi = \pi/2$

Le rapport $Z = \frac{U}{I} = L\omega$ est l'impédance réelle de la bobine (parfaite)

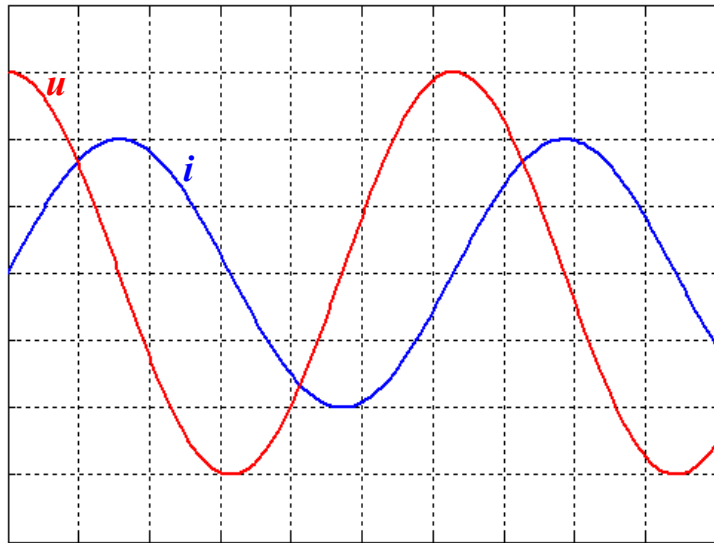
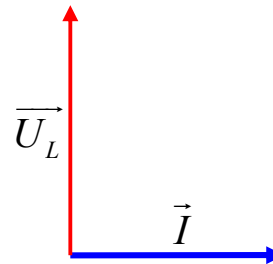


Figure II.3: Courant et tension dans une bobine

Constructions de Fresnel

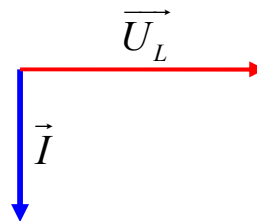
$$\vec{u}_L \Leftrightarrow (U_L, \frac{\pi}{2}) \text{ avec } U_L = L\omega.I$$

$$\vec{i} \Leftrightarrow (I, 0)$$

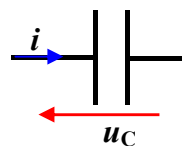


Remarque : Si la tension u est prise comme références des phases alors :

$$\vec{u}_L \Leftrightarrow (U_L, 0) \text{ et } \vec{i} \Leftrightarrow (I, -\frac{\pi}{2})$$



II.5.3 Condensateur parfait



$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = -\frac{1}{C\omega} I_M \cos(\omega t) = (\frac{1}{C\omega} . I) \sqrt{2} \sin(\omega t - \pi / 2) \tag{II.4}$$

$$= U \sqrt{2} \sin(\omega t - \pi / 2)$$

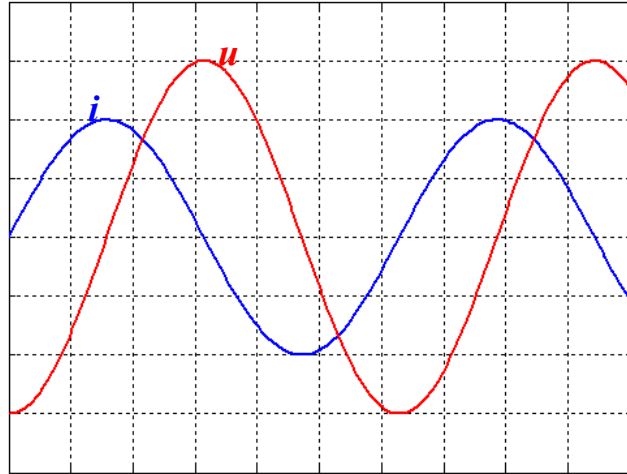


Figure II.4 : Courant et tension dans un condensateur

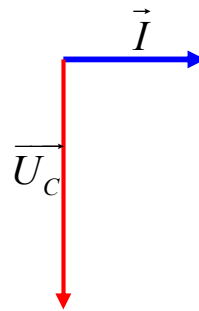
Le courant i est en quadrature avance sur la tension u : $\varphi = -\pi/2^\circ$

Le rapport $Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{C\omega}$ est l'impédance réelle du condensateur.

Constructions de Fresnel

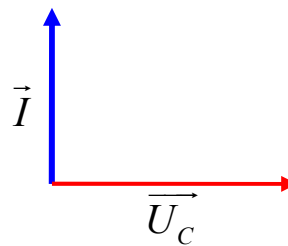
$$\vec{u}_C \Leftrightarrow (U_C, -\frac{\pi}{2}) \text{ avec } U_C = \frac{1}{C\omega} \cdot I$$

$$\vec{i} \Leftrightarrow (I, 0)$$



Remarque : Si la tension u est prise comme références des phases alors :

$$\vec{u}_C \Leftrightarrow (U_C, 0) \text{ et } \vec{i} \Leftrightarrow (I, +\frac{\pi}{2})$$



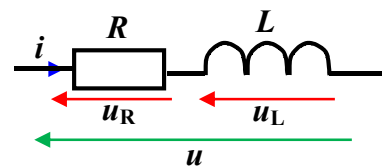
II.5.4 Dipôle R, L série (Bobine réelle)

Une bobine réelle est représentée (modélisée) par son inductance propre L en série avec la résistance interne R du fil de cuivre.

Equation de la maille : $u(t) = u_R(t) + u_L(t)$

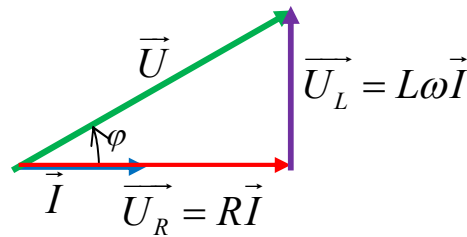
$$u = R \cdot I_M \sin(\omega t) + L\omega I_M \cos(\omega t)$$

$$u = R \cdot I \sqrt{2} \sin(\omega t) + L\omega I \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi / 2)$$



(II.5)

$$\Rightarrow \vec{U} = \vec{u}_R + \vec{u}_L \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{u}_R &\Leftrightarrow (U_R, 0) \quad \text{avec } U_R = R.I \\ \vec{u}_L &\Leftrightarrow (U_L, \frac{\pi}{2}) \quad \text{avec } U_L = L\omega.I \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \\ \Rightarrow U &= \sqrt{(R.I)^2 + (L\omega.I)^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \\ U &= Z.I \end{aligned}$$

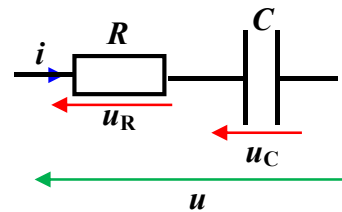
Avec $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$; est l'impédance réelle de la bobine.

Déphasage : Le courant i est en **retard** sur la tension u ;

$$\text{tg} \varphi_{i/u} = -\frac{L\omega}{R} \quad \text{ou} \quad \text{tg} \varphi_{u/i} = \frac{L\omega}{R}$$

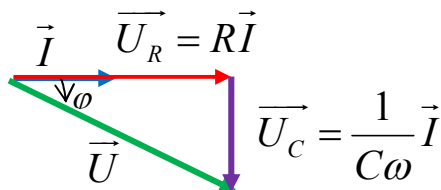
II.5.5 Dipôle R, C série

Equation de la maille : $u(t) = u_R(t) + u_C(t)$



$$\begin{aligned} u &= R.I_M \sin(\omega t) - \frac{1}{C\omega} I_M \cos(\omega t) \\ u &= R.I_M \sin(\omega t) + \frac{1}{C\omega} I_M \sin(\omega t - \pi / 2) \end{aligned} \tag{II.6}$$

$$\Rightarrow \vec{U} = \vec{u}_R + \vec{u}_C \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{u}_R &\Leftrightarrow (U_R, 0) \quad \text{avec } U_R = R.I \\ \vec{u}_C &\Leftrightarrow (U_C, -\frac{\pi}{2}) \quad \text{avec } U_C = \frac{1}{C\omega}.I \end{aligned}$$



$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{(R.I)^2 + \left(\frac{1}{C\omega}.I\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}.I = Z.I$$

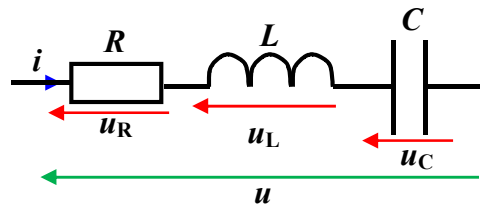
Avec $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$: impédance réelle du circuit RC.

Déphasage : Le courant i est en **avance** sur la tension u :

$$\text{tg}\varphi_{i/u} = \frac{1}{RC\omega} \quad \text{ou} \quad \text{tg}\varphi_{u/i} = -\frac{1}{RC\omega}$$

II.5.6 Dipôle R, L, C série

Equation de la maille : $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

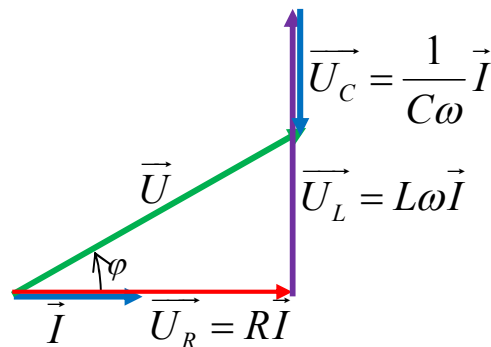


$$u = R.I_M \sin(\omega t) + L\omega I_M \cos(\omega t) - \frac{1}{C\omega} I_M \cos(\omega t)$$

(II.7)

$$u = R.I\sqrt{2} \sin(\omega t) + L\omega I\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2) + \frac{1}{C\omega} I_M \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$\Rightarrow \vec{U} = \vec{u}_R + \vec{u}_L + \vec{u}_C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{u}_R \Leftrightarrow (U_R, 0) & \text{avec } U_R = R.I \\ \vec{u}_L \Leftrightarrow (U_L, \frac{\pi}{2}) & \text{avec } U_L = L\omega.I \\ \vec{u}_C \Leftrightarrow (U_C, -\frac{\pi}{2}) & \text{avec } U_C = \frac{1}{C\omega}.I \end{cases}$$



$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

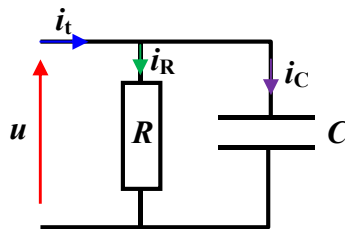
$$\Rightarrow U = \sqrt{(R.I)^2 + (L\omega I - \frac{1}{C\omega}I)^2} = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} . I = Z.I$$

Avec $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$: impédance réelle du circuit *RLC* série.

Déphasage : Le courant i est en **retard** sur la tension u ;

$$\operatorname{tg}\varphi_{i/u} = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\varphi_{u/i} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

II.5.7 Dipôle *R, C* parallèle (Condensateur réel)



Equation du nœud : $i(t) = i_R(t) + i_C(t)$

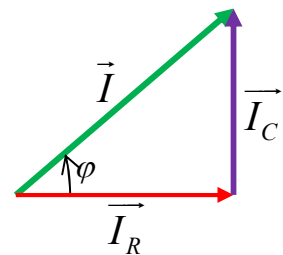
$$i = I_R \sqrt{2} \sin(\omega t) + I_C \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2) \quad (\text{II.8})$$

$$\Rightarrow \vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_C \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{I}_R &\Leftrightarrow (I_R, 0) \\ \vec{I}_C &\Leftrightarrow (I_C, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{1/C\omega}\right)^2} = U \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2} = Y.U$$

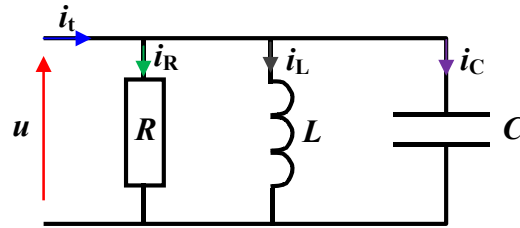
Avec $Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2}$: admittance réelle du circuit *RC*.



Déphasage : Le courant i est en **avance** sur la tension u :

$$\operatorname{tg}\varphi_{i/u} = RC\omega \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\varphi_{u/i} = -RC\omega$$

II.5.8 Dipôle R, L, C parallèle



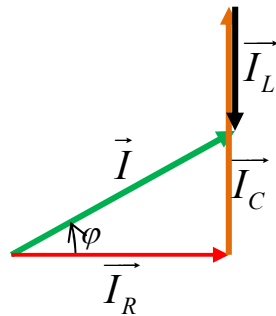
Equation du nœud : $i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$

$$\Rightarrow i = I_R \sqrt{2} \sin(\omega t) + I_L \sqrt{2} \sin(\omega t - \pi / 2) + I_C \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi / 2) \quad (\text{II.9})$$

$$\vec{I}_R \Leftrightarrow (I_R, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad \text{avec} \quad \vec{I}_L \Leftrightarrow (I_L, -\frac{\pi}{2})$$

$$\vec{I}_C \Leftrightarrow (I_C, \frac{\pi}{2})$$



$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{1/C\omega} - \frac{U}{L\omega}\right)^2} = U \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} = Y \cdot U$$

Avec $Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$: admittance réelle du circuit RLC.

Déphasage : Le courant i est en **avance** sur la tension u : $\text{tg} \varphi_{i/u} = RC\omega - \frac{R}{L\omega}$

Chapitre III

*Notation complexe
des grandeurs électriques*

III.1 INTRODUCTION

Nous avons vu au chapitre précédent que la représentation vectorielle des grandeurs électriques est un outil qui permet de manipuler plus facilement ces grandeurs comparativement à l'utilisation de la forme instantanée. Néanmoins, cette représentation, vu qu'elle est graphique, est caractérisée par sa lenteur à cause de la nécessité de construire des diagrammes parfois fastidieux. Nous allons voir que l'utilisation des nombres complexes, dont la représentation est semblable aux vecteurs, est plus avantageuse car les opérations sont plus simples à effectuer.

III.2 RAPPELS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Un nombre complexe \underline{z} est défini par l'équation :

$$\underline{z} = a + j.b \quad (\text{III.01})$$

Où a et b sont des réels et j un nombre imaginaire tel que : $j = \sqrt{-1}$ ($j^2 = -1$).

a représente la partie réelle de \underline{z} , on note $a = \Re(\underline{z})$.

b représente la partie imaginaire de \underline{z} , on note $b = \text{Im}(\underline{z})$.

Remarque : La lettre j est utilisée ici en remplacement de la lettre i (habituellement utilisée en mathématique) pour éviter la confusion avec le symbole ' i ' du courant.

III.2.1 Module et argument

➤ **Le module ou la norme de \underline{z} est :** $Z = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

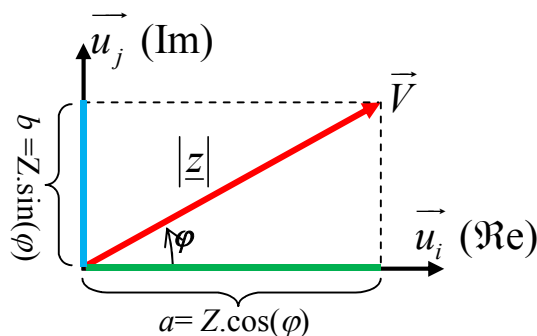
➤ **L'argument de \underline{z} est φ tel que :** $\text{tg}(\varphi) = \frac{\text{Im}(\underline{z})}{\text{Re}(\underline{z})} = \frac{b}{a}$

III.2.2 Représentation graphique d'un nombre complexe

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (\vec{u}_i, \vec{u}_j) , on peut associer au complexe \underline{z} le vecteur :

$$\vec{V} = a\vec{u}_i + b\vec{u}_j \quad (\text{III.02})$$

On dit alors que $\underline{z} = a + j.b$ est l'affixe du vecteur \vec{V}



III.2.3 Différentes formes

La forme vue précédemment ($\underline{z} = a + j.b$) mettant en évidence les parties réelle et imaginaire de \underline{z} est appelée *forme algébrique*. L'utilisation du module Z et de l'argument φ donne lieu à deux autres formes :

➤ La *forme trigonométrique* :

$$\underline{z} = Z.(\cos \varphi + j.\sin \varphi) \quad (\text{III.03})$$

➤ La *forme exponentielle* :

$$\underline{z} = Z.e^{j\varphi} \quad (\text{III.04})$$

III.2.4 Relations remarquables

Des relations précédentes, on note les valeurs remarquables suivantes :

φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	$a = Z.\cos \varphi$	$b = Z.\sin \varphi$	$\underline{z} = Z.e^{j\varphi}$	$e^{j\varphi}$
0	1	0	Z	0	Z	1
$+\frac{\pi}{2}$	0	+1	0	Z	$j.Z$	j
$-\frac{\pi}{2}$	0	-1	0	$-Z$	$-j.Z$	$-j$

III.2.5 Complexe conjugué

On définit le complexe conjugué de \underline{z} ($\underline{z} = a + j.b = Z.e^{j\varphi}$) comme suit:

$$\underline{z}^* = a - j.b = Z.e^{-j\varphi} \quad (\text{III.05})$$

III.2.6 Propriétés des opérations entre nombres complexes

Soit deux nombres complexes :

$$\underline{z}_1 = a_1 + j.b_1 = Z_1.e^{j\theta_1} \quad \text{et} \quad \underline{z}_2 = a_2 + j.b_2 = Z_2.e^{j\theta_2}$$

Les nombres complexes obéissent aux mêmes règles de calcul que celles effectuées sur les nombres réels (addition, soustraction, multiplication et division). On obtient ainsi les relations suivantes.

III.2.6.1 Addition (ou soustraction)

Si $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$, alors :

$$\underline{z} = a_1 + j.b_1 + a_2 + j.b_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \quad (\text{III.06})$$

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres complexes on utilise de préférence la notation cartésienne

III.2.6.2 Produit

Si $\underline{z} = \underline{z}_1 \times \underline{z}_2$, alors :

$$\underline{z} = Z_1 \cdot e^{j\theta_1} \times Z_2 \cdot e^{j\theta_2} = Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{III.07})$$

Pour calculer le produit de deux nombres complexes on utilise de préférence la notation polaire

Le module du produit est égal au produit des modules
L'argument du produit est égal à la somme des arguments

III.2.6.3 Division

Si $\underline{z} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}$, alors :

$$\underline{z} = \frac{Z_1 \cdot e^{j\theta_1}}{Z_2 \cdot e^{j\theta_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{III.08})$$

Pour calculer le rapport de deux nombres complexes on utilise de préférence la notation polaire

Le module du quotient est égal au rapport des modules
L'argument du quotient est égal à la différence des arguments

III.3 REPRÉSENTATION COMPLEXE DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES

Soit la grandeur sinusoïdale : $x(t) = X \sin(\omega t + \theta)$

En notation complexe $x(t)$ sera *représentée* par le complexe :

$$\underline{x} = X \cdot e^{j(\omega t + \theta)} = X \cdot e^{j\theta} e^{j\omega t} = \underline{X} e^{j\omega t} \quad (\text{III.09})$$

où ;

$$\underline{X} = X \cdot e^{j\theta} \text{ est l'amplitude complexe.} \quad (\text{III.10})$$

Il y a lieu de noter que la grandeur électrique traitée ($x(t)$) ne constitue qu'une partie du nombre complexe \underline{x} . En effet :

$$\underline{x} = X \cdot e^{j(\omega t + \theta)} = X \cos(\omega t + \theta) + j \cdot X \sin(\omega t + \theta) \quad (\text{III.11})$$

Si la grandeur électrique est écrite en fonction du *cosinus* elle sera représentée par la partie réelle du nombre complexe ($x(t) = \Re(\underline{x})$), et si elle est écrite sous forme de *sinus* elle sera représentée par la partie imaginaire du nombre complexe ($x(t) = \text{Im}(\underline{x})$).

Dans la représentation vectorielle des grandeurs électriques la rotation des vecteurs (dû à la pulsation ω) est omise, ce qui permet de prendre en compte que les phases à l'origine. De même, le terme $e^{j\omega t}$, commun à toutes les grandeurs sinusoïdales, est lui aussi ignoré car s'éliminant

tout seul dans les différentes opérations sur les grandeurs électriques (loi des mailles, loi des nœuds...). Néanmoins, ce terme doit apparaître lorsqu'il s'agit d'effectuer une opération de dérivation ou d'intégration.

L'amplitude complexe $\underline{X} = X.e^{j\theta}$ est aussi appelée *phaseur*. C'est la notation raccourcie du complexe \underline{x} (représentant le signal $x(t)$) qui contient les deux informations essentielles du signal à savoir l'amplitude X et la phase à l'origine θ .

On utilise aussi la notation angulaire compacte suivante : $\underline{X} = X \angle \theta$,

$$\underline{X} = X \angle \theta = X.e^{j\theta} = X.(\cos \theta + j \sin \theta)$$

III.3.1 Représentation d'une tension

$$u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \theta_u) \Rightarrow \underline{u} = U.e^{j\theta_u} = U \angle \theta_u \quad [\text{V}]$$

III.3.2 Représentation d'un courant

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \theta_i) \Rightarrow \underline{i} = I.e^{j\theta_i} = I \angle \theta_i \quad [\text{A}]$$

III.3.3 Représentation d'une impédance

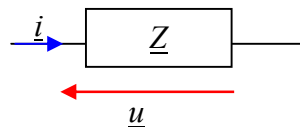
L'impédance complexe est représentée par : $\underline{z} = Z.e^{j\varphi}$

Z est l'impédance en ohms (Ω).

φ est le déphasage entre le courant et la tension.

III.3.4 Puissance électrique en complexe

Soit un dipôle \underline{z} traversé par un courant \underline{i} et ayant une tension \underline{u} à ces bornes.



Si $\underline{u} = U.e^{j\theta_u}$ et $\underline{i} = I.e^{j\theta_i}$, alors la puissance apparente S en complexe est définie par :

$$\underline{S} = \underline{u} \times \underline{i}^* \quad (\text{III.12})$$

Où \underline{i}^* est le complexe conjugué du courant \underline{i} .

$$\Rightarrow \underline{S} = U.e^{j\theta_u} \times I.e^{-j\theta_i} = U.I.e^{j(\theta_u - \theta_i)} = U.I.e^{j\varphi} = S \angle \varphi \quad (\text{III.13})$$

En utilisant la forme polaire :

$$\begin{aligned} \underline{S} &= U.I.e^{j\varphi} = U.I(\cos \varphi + j \sin \varphi) = U.I.\cos \varphi + j.U.I.\sin \varphi \\ \underline{S} &= S.\cos \varphi + j.S.\sin \varphi = P + jQ \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Avec : $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

On voit bien que P et Q sont de nature différente l'un étant réel (P) et l'autre imaginaire (Q)

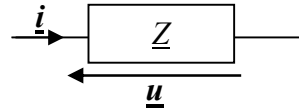
III.4 APPLICATION DES COMPLEXES EN ÉLECTRICITÉ

Toutes les relations que nous avons vues en régime alternatif sinusoïdal utilisant la représentation instantanée restent valables en représentation complexe ; loi d'ohm, loi des mailles, loi des nœuds, etc.

III.4.1 Loi d'Ohm

$$\underline{u} = \underline{z} \times \underline{i}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \underline{u} = Ue^{j\theta_u} \\ \underline{i} = Ie^{j\theta_i} \end{cases}$$



$$\text{Alors : } \underline{z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{Ue^{j\theta_u}}{Ie^{j\theta_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\theta_u - \theta_i)} = Ze^{j\varphi}$$

\underline{z} est l'impédance complexe du dipôle : $\underline{z} = Ze^{j\varphi}$

Z est le module de l'impédance en ohms (Ω) : $Z = U/I$

φ : est le déphasage provoquée par le dipôle entre la tension u à ses bornes et le courant i qui le traverse : $\varphi = \theta_u - \theta_i$.

On peut aussi écrire la forme cartésienne de \underline{z} ;

$$\underline{z} = Ze^{j\varphi} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi) = R_Z + jX_Z$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} R_Z = Z \cos \varphi : \text{ est une résistance } (\Omega) \\ X_Z = Z \sin \varphi : \text{ est une réactance } (\Omega) \end{cases}$$

$$Z = |\underline{z}| = \sqrt{R_Z^2 + X_Z^2}$$

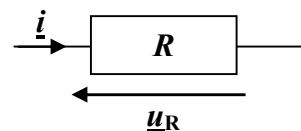
$$\varphi = \text{atg} \left(\frac{X_Z}{R_Z} \right)$$

III.4.1.1 Loi d'Ohm pour un conducteur ohmique

$$\begin{aligned} \underline{u}_R &= \underline{z}_R \times \underline{i} \\ U.e^{j\theta_u} &= R \times I.e^{j\theta_i} \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Ce qui permet d'écrire : $U = R \times I$, $\theta_u = \theta_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_R = 0 \end{cases}$$

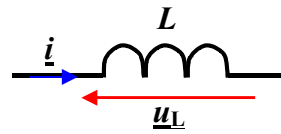


L'impédance \underline{z}_R est un réel pur

III.4.1.2 Loi d'Ohm pour une inductance

$$\text{Nous avons : } u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt}$$



(III.16)

Dans cette relation le courant \underline{i} est dérivé par rapport au temps, on doit donc écrire son expression complexe complète, à savoir : $\underline{i} = I.e^{j(\omega t + \theta_i)}$

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} = L \frac{d(I.e^{j(\omega t + \theta_i)})}{dt} = LI \frac{d(e^{j(\omega t + \theta_i)})}{dt} = LI(j\omega)e^{j(\omega t + \theta_i)} = jL\omega I.e^{j(\omega t + \theta_i)}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = jL\omega \times \underline{i}$$

(III.17)

Sachant que : $\underline{u} = \underline{z}_L \times \underline{i} \Rightarrow \underline{z}_L = jL\omega = L\omega.e^{j\pi/2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_L = X_L = L\omega \\ \varphi_z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'impédance \underline{Z}_L est un imaginaire (positif) pur

III.4.1.3 Loi d'Ohm pour un condensateur

$$\text{Nous avons : } u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\underline{u}_C = \frac{1}{C} \int \underline{i}.dt = \frac{1}{C} \int I.e^{j(\omega t + \theta_i)} dt = \frac{I}{jC\omega} e^{j(\omega t + \theta_i)}$$

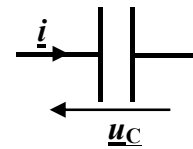
$$\Rightarrow \underline{u}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}$$

(III.18)

$$\Rightarrow \underline{z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -j \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} .e^{-j\pi/2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_C = X_C = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi_z = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'impédance \underline{Z}_C est un imaginaire (négatif) pur



Remarque :

La dérivation d'une grandeur sinusoïdale complexe revient à la multiplier par $j\omega$
L'intégration d'une grandeur sinusoïdale complexe revient à la diviser par $j\omega$

III.4.2 Associations de dipôles – Impédances équivalentes

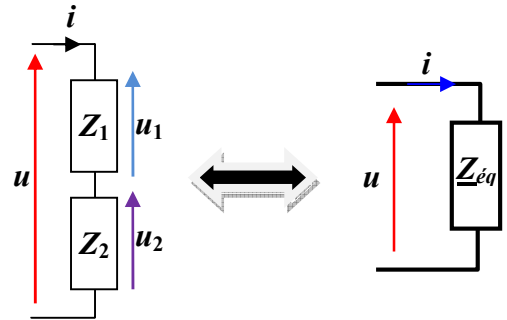
III.4.2.1 Association série

D'après la loi des mailles : $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$

avec : $\underline{u}_1 = \underline{z}_1 \times \underline{i}$ et $\underline{u}_2 = \underline{z}_2 \times \underline{i}$

$\Rightarrow \underline{u} = \underline{z}_1 \times \underline{i} + \underline{z}_2 \times \underline{i} = (\underline{z}_1 + \underline{z}_2) \times \underline{i} = \underline{Z} \times \underline{i}$

$\Rightarrow \underline{Z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = \underline{Z}_{\text{équivalente}}$

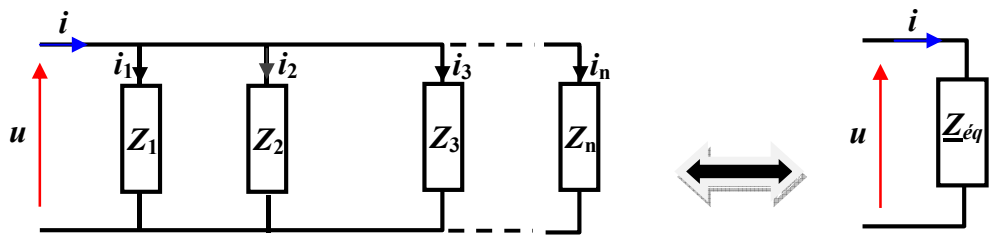


De la même manière, on peut démontrer aisément que pour n dipôles en série ;

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n \underline{z}_i \quad (\text{III.19})$$

L'impédance équivalente de plusieurs dipôles en série est la somme des impédances de tous ces dipôles

III.4.2.2 Association parallèle :



D'après la loi des nœuds : $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 + \dots + \underline{i}_n$, avec : $\underline{i}_i = \underline{u} / \underline{z}_i$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{z}_1} + \frac{\underline{u}}{\underline{z}_2} + \frac{\underline{u}}{\underline{z}_3} + \dots + \frac{\underline{u}}{\underline{z}_n} = \left(\frac{1}{\underline{z}_1} + \frac{1}{\underline{z}_2} + \frac{1}{\underline{z}_3} + \dots + \frac{1}{\underline{z}_n} \right) \times \underline{u} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{équival.}}} \times \underline{u}$$

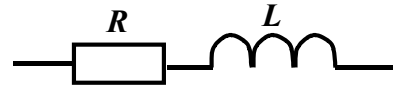
$$\Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{\text{équival.}}} = \frac{1}{\underline{z}_1} + \frac{1}{\underline{z}_2} + \frac{1}{\underline{z}_3} + \dots + \frac{1}{\underline{z}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{z}_i} \quad (\text{III.20})$$

Ou bien : $\underline{Y}_{\text{équival.}} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 + \underline{y}_3 + \dots + \underline{y}_n = \sum_{i=1}^n \underline{y}_i \quad (\text{III.21})$

L'admittance équivalente de plusieurs dipôles en parallèle est la somme des admittances de tous ces dipôles

III.4.3 Exemples d'application

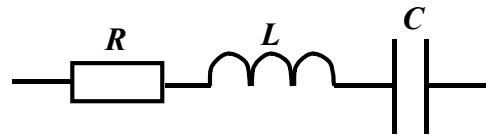
III.4.3.1 Dipôle R, L série (Bobine réelle)



$$\underline{Z}_{\acute{e}q} = \underline{z}_R + \underline{z}_L = R + jL\omega = Ze^{j\varphi}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \\ \text{tg } \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{Z}_{\acute{e}q})}{\text{Re}(\underline{Z}_{\acute{e}q})} = \frac{L\omega}{R} \end{cases}$$

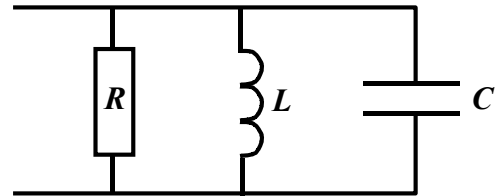
III.4.3.2 Dipôle R, L, C série



$$\underline{Z}_{\acute{e}q} = \underline{z}_R + \underline{z}_L + \underline{z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = Ze^{j\varphi}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \text{tg } \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{Z}_{\acute{e}q})}{\text{Re}(\underline{Z}_{\acute{e}q})} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \end{cases}$$

III.4.3.3 Dipôle R, L, C parallèle



$$\frac{1}{\underline{Z}_{\acute{e}q.}} = \frac{1}{\underline{z}_R} + \frac{1}{\underline{z}_L} + \frac{1}{\underline{z}_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j.L\omega} + \frac{1}{1/jC\omega}$$

Il est plus aisé de calculer l'admittance réelle puis déduire l'impédance réelle ;

$$\underline{Y}_{\acute{e}q.} = \underline{y}_R + \underline{y}_L + \underline{y}_C = \frac{1}{R} - j\frac{1}{L\omega} + jC\omega = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$Y = |\underline{Y}_{\acute{e}q}| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi_Z = -\varphi_Y = -\text{arctg}\left(\frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{1/R}\right)$$

Chapitre IV

Courant alternatif triphasé

IV.1 INTRODUCTION

Si l'alimentation des appareils ménagers et industriels de faibles puissances se fait généralement en courant monophasé, la production et le transport de l'énergie électrique se font en courants triphasés. Ce choix est dicté par les avantages qu'offre le système triphasé par rapport au système monophasé.

IV.2 INTÉRÊT DU SYSTÈME TRIPHASÉ

Le réseau triphasé présente par rapport au réseau monophasé les avantages suivants:

- Le transport d'une plus grande puissance avec des pertes plus faibles.
- Le transport de la même puissance qu'en monophasé avec l'utilisation d'une quantité moindre de cuivre.
- Création facile d'un champ magnétique tournant.
- Alimentation de moteurs triphasés (moteur à cage) qui sont facile à entretenir, robustes et économiques.
- Possibilité d'avoir deux tensions à disposition (par exemple : 230 et 400 V) ce qui permet de modifier la puissance des appareils en changeant leur couplage.
- Obtention d'un courant continu de faibles ondulations lors de l'emploi de redresseurs à partir du courant triphasé.

IV.2.1 Exemple explicatif

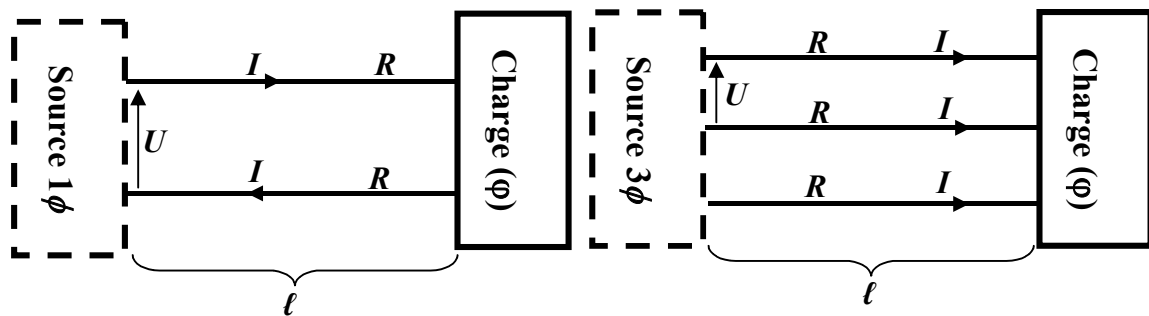


Figure IV.1 : Avantage du transport d'énergie en triphasé

On s'intéresse au calcul des pertes joules dans la ligne lors du transport d'une puissance P sur une distance ℓ sous une tension U dans les deux cas monophasé et triphasé.

Soit R la résistance d'un fil de la ligne ; $R = \rho \ell / S$, avec ℓ , S et ρ , respectivement, la longueur, la section et la résistivité du fil de ligne. Les pertes joules sont définies comme suit ;

a- Ligne monophasée :

$$\Delta P_{\text{joules}(1\phi)} = 2RI^2 = 2R \left(\frac{P}{U \cos \varphi} \right)^2 = 2R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} \quad (\text{IV.01})$$

b- Ligne triphasée :

$$\Delta P_{\text{joules}(3\phi)} = 3RI^2 = 3R \left(\frac{P}{\sqrt{3}U \cos \varphi} \right)^2 = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} \quad (\text{IV.02})$$

En transportant la même puissance P en triphasé les pertes joules dans la ligne sont réduite de moitié par rapport au transport en monophasé.

IV.2.2 Définitions :

- Un système de tensions (ou courants) triphasées équilibré (symétrique) est un ensemble de trois tensions (ou courants) alternatives, de même fréquence et de même valeur efficace, décalées l'une par rapport aux autres de 120° ($2\pi/3$). Il est généré par des alternateurs triphasés au niveau des centrales électriques.
- Le réseau triphasé comporte trois conducteurs (un par phase) et éventuellement un quatrième pour le retour du courant, appelé conducteur de neutre.
- Par convention, le système est dit *direct* si les phases sont ordonnées dans le sens trigonométrique inverse (sens horaire) et dit *inverse* si les phases sont ordonnées dans le sens trigonométrique (sens antihoraire).

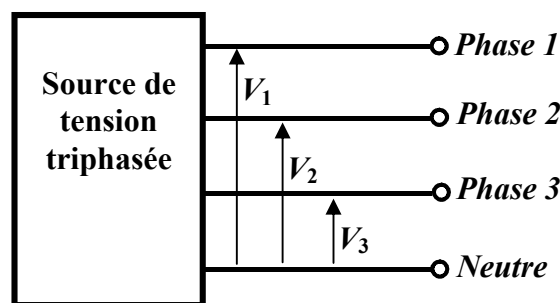


Figure IV.2 : Source de tension triphasée

IV.3 ÉTUDE DES TENSIONS DÉLIVRÉES**IV.3.1 Tension simples**

On appelle *tensions simples* les trois tensions disponibles entre chaque phase et le neutre (cf. fig. IV.2). Elles sont notées V_1 , V_2 et V_3 ou V_A , V_B et V_C ou V_R , V_S et V_T .

IV.3.1.1 Représentation temporelles

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= V\sqrt{2} \sin(\omega t) \\
 V_2(t) &= V\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi / 3) \\
 V_3(t) &= V\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi / 3)
 \end{aligned}
 \tag{IV.03}$$

Où V est la valeur efficace des tensions simples.

Les chronogrammes des tensions sinusoïdales sont représentés sur la figure ci-dessous :

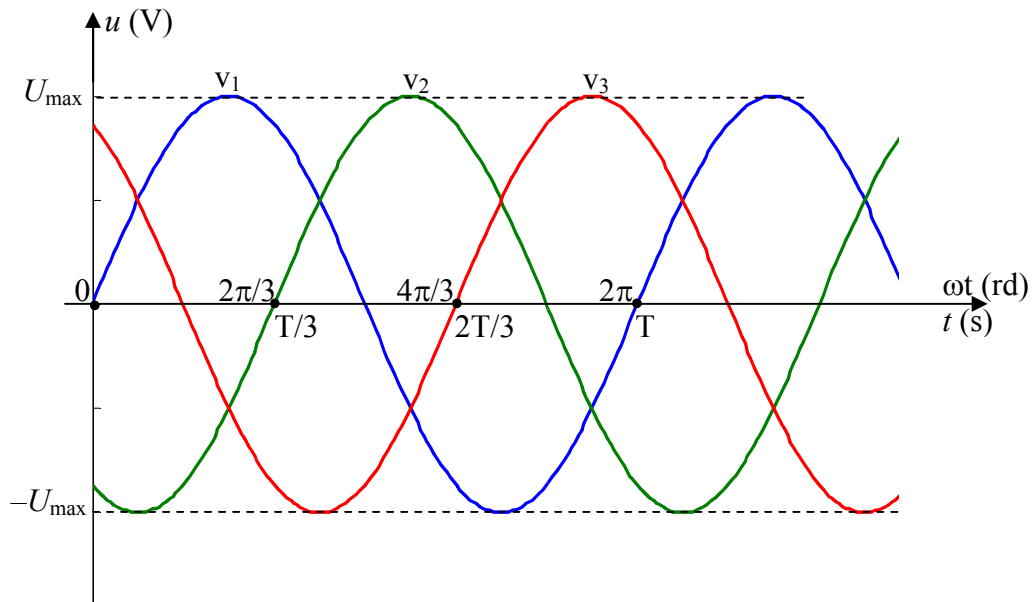


Figure IV.3 : Représentation temporelle des tensions en triphasé

IV.3.1.2 Représentation vectorielle de Fresnel

Le système d'équations (IV.03) est représenté graphiquement par trois vecteurs ;

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} V \\ -\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_3 \begin{pmatrix} V \\ -\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} \tag{IV.04}$$

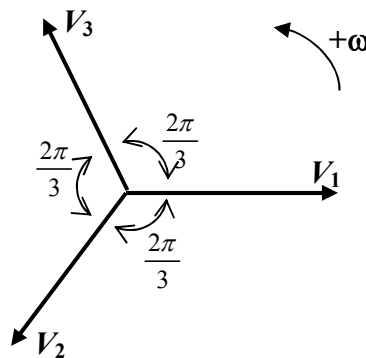


Figure IV.4 : Représentation de Fresnel du système triphasé direct de tensions

On peut montrer par cette construction graphique que $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$, par conséquent, le système est dit **équilibré**.

Le système est **direct** car les phases sont ordonnées dans le sens trigonométrique inverse (sens horaire).

IV.3.1.3 Représentation complexe d'un système triphasé de tension

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= V.e^{j0} \\ \underline{V}_2 &= V.e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad (\text{IV.05}) \\ \underline{V}_3 &= V.e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}$$

Système direct

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= V.e^{j0} \\ \underline{V}_2 &= V.e^{+j\frac{2\pi}{3}} \quad (\text{IV.06}) \\ \underline{V}_3 &= V.e^{+j\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}$$

Système inverse

IV.3.2 Tensions entre phases

IV.3.2.1 Définitions

Les tensions u_{ij} prise entre deux phase différentes sont appelées **tensions entre phases** ou **tensions composées**. On distingue trois tensions composées, notées par convention ; u_{12} , u_{23} et u_{31} .

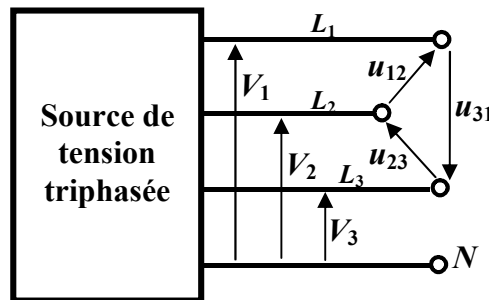


Figure IV.5 : Définition des tensions entre phases

IV.3.2.2 Relation entre les tensions simples et les tensions composées

En régime équilibré et d'après la convention précédente ;

$$u_{12} = v_1 - v_2 = V\sqrt{2} \sin(\omega t) - V\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi / 3) = (V\sqrt{3})\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi / 6) \quad (\text{IV.07})$$

$$u_{23} = v_2 - v_3 = V\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi / 3) - V\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi / 3) = (V\sqrt{3})\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi / 2) \quad (\text{IV.08})$$

$$u_{31} = v_3 - v_1 = V\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi / 3) - V\sqrt{2} \sin(\omega t) = (V\sqrt{3})\sqrt{2} \sin(\omega t - 7\pi / 6) \quad (\text{IV.09})$$

En notant $U = V\sqrt{3}$ la valeur efficace des tensions entre phases, on obtient un système triphasé des tensions composées ;

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= U\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi / 6) \\ u_{23}(t) &= U\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi / 2) \\ u_{31}(t) &= U\sqrt{2} \sin(\omega t - 7\pi / 6) \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Les figures IV.6 et IV.7 représentent, respectivement, le chronogramme des tensions sinusoïdales composées et la représentation vectorielle de Fresnel de ces grandeurs.

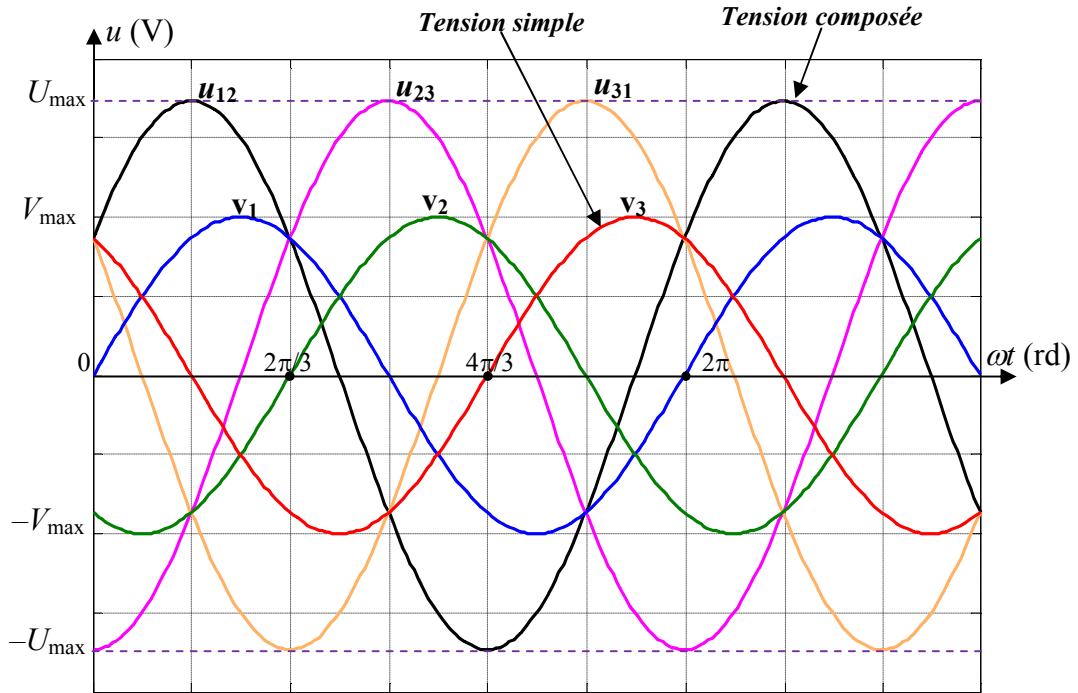


Figure IV.6 : Chronogramme des tensions simples et des tensions composées

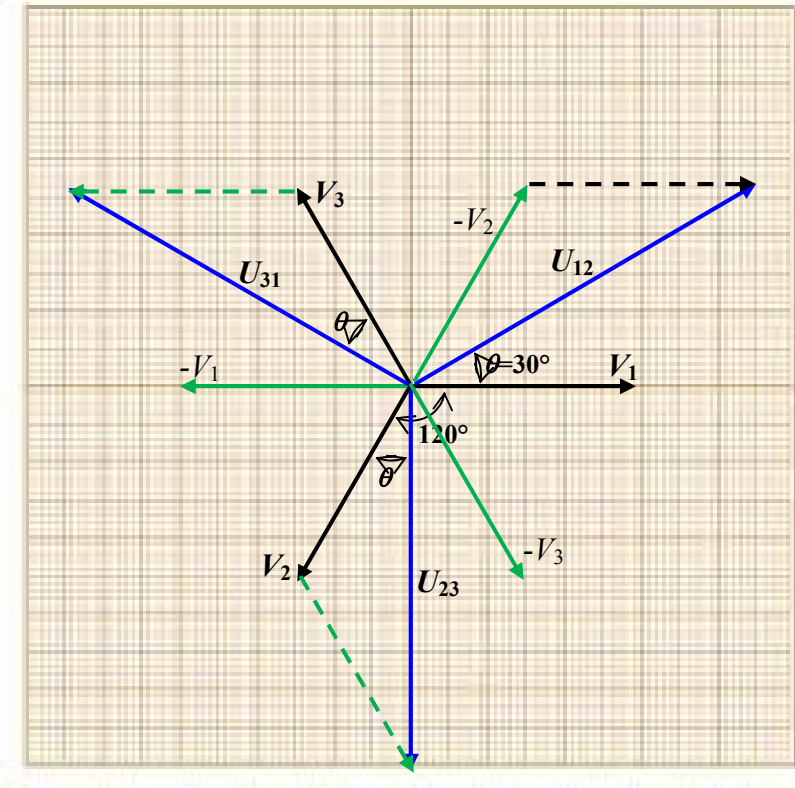


Figure IV.7 : Représentation de Fresnel du système triphasé direct des tensions simples et des tensions composées

D'après la construction de Fresnel précédente, on peut établir ce qui suit :

- La somme des tensions composées est nulle : $\vec{u}_{12} + \vec{u}_{23} + \vec{u}_{31} = \vec{0}$
- Le système de tensions composées est déphasé (en avance) de 30° ($\pi/6$) par rapport au système de tensions simples.
- Les tensions composées ont la même fréquence que les tensions simples.
- Les valeurs efficaces des tensions composées (U) et des tensions simples (V) sont liées par la relation : $U = \sqrt{3} \times V$.

Remarque :

- En Algérie, la SONELGAZ distribue le réseau triphasé suivant :
 - Valeur efficace de la tension simple (phase-neutre) : $V = 230$ V
 - Fréquence du signal : 50 Hz
 - Valeur efficace de la tension composée entre phases : $U = \sqrt{3} \times V \approx 400$ V
- En pratique, le système triphasé est désigné par un couple de tensions ; tension simple/tension composée (V/U).
Exemple 230/400 V, 380/660 V, ...

IV.4 COUPLAGE D'UN RÉCEPTEUR TRIPHASÉ ÉQUILIBRÉ

IV.4.1 Récepteur triphasé

Dans les circuits alimentés en monophasé les récepteurs sont des dipôles ayant deux bornes ; une borne est reliée à la phase et l'autre au neutre. En triphasé, les récepteurs possèdent trois ou quatre bornes (une par phase plus une quatrième réservée éventuellement au neutre).

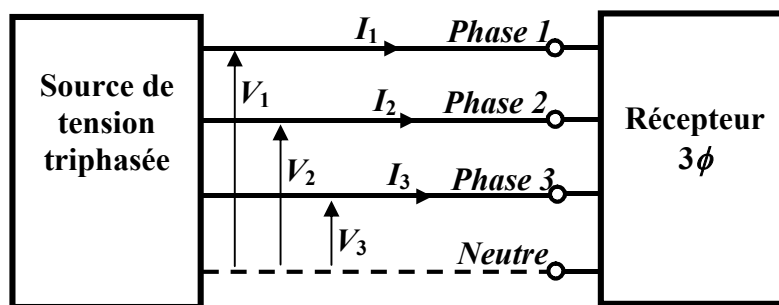


Figure IV.8 : Récepteur triphasé

Définitions :

Un récepteur triphasé est constitué de trois dipôles d'impédance Z_i . Si les impédances Z_i sont identiques on dit que le récepteur triphasé est équilibré, autrement, on parle de récepteur triphasé déséquilibré.

Remarque : Dans ce manuel, on considère que les récepteurs sont équilibrés.

IV.4.2 Modes de couplage du récepteur triphasé

Dans un système triphasé à trois ou quatre fils, les trois dipôles (impédances) peuvent être disposés de deux manières différentes :

IV.4.2.1 Disposition ou couplage étoile (symbole Y)

Une borne de chaque dipôle est reliée à une phase tandis que les trois autres bornes sont interconnectées (point N'). Ce point commun peut être relié au neutre (point N).

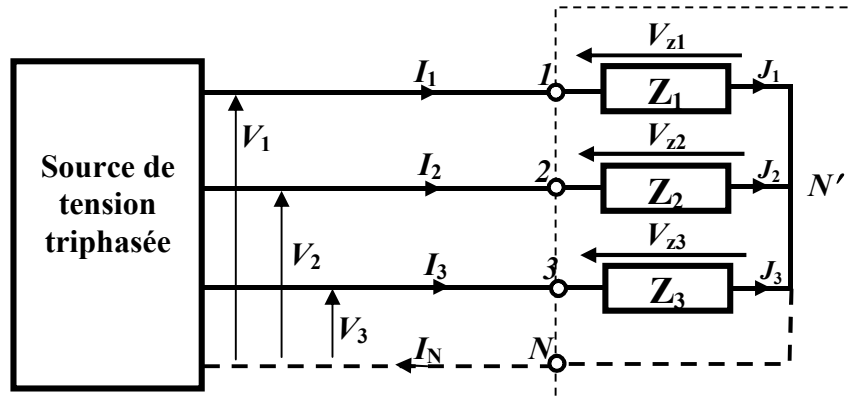


Figure IV.9 : Récepteur couplé en étoile

a- Etude des tensions

Dans le couplage étoile, les trois dipôles de la charge sont soumis aux tensions simples (cf. fig. IV.9). En effet :

$$\underline{V}_{z1} = \underline{V}_1, \underline{V}_{z2} = \underline{V}_2 \text{ et } \underline{V}_{z3} = \underline{V}_3 \quad (\text{IV.11})$$

Les tensions \underline{V}_{z1} , \underline{V}_{z2} et \underline{V}_{z3} sont appelés *tensions de phase*.

b- Etude des courants

Les courants dans les impédances \underline{J}_1 , \underline{J}_2 et \underline{J}_3 sont appelés *courants de phase*.

Les courants dans les conducteurs de la ligne \underline{I}_1 , \underline{I}_2 et \underline{I}_3 sont appelés *courants de ligne*.

Dans le couplage étoile du récepteur, les courants de ligne sont les mêmes que les courants de phase $\Rightarrow \underline{I}_i = \underline{J}_i$.

Les courants \underline{I}_1 , \underline{I}_2 et \underline{I}_3 appelés *courants de ligne* sont ceux dans les dipôles. On peut les calculer comme suit ;

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{V e^{j0}}{Z_1 e^{j\varphi_1}} = I_1 e^{j(-\varphi_1)} \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{V e^{j(-2\pi/3)}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = I_2 e^{j(-2\pi/3 - \varphi_2)} \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{V e^{j(-4\pi/3)}}{Z_3 e^{j\varphi_3}} = I_3 e^{j(-4\pi/3 - \varphi_3)} \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

En régime équilibré les trois dipôles du récepteur sont identiques :

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = I e^{j(-\varphi)} \\ \underline{I}_2 = I e^{j(-2\pi/3-\varphi)} \\ \underline{I}_3 = I e^{j(-4\pi/3-\varphi)} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} i_1(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}) \\ i_3(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

Avec $I = \frac{V}{Z}$, la valeur efficace des courants de ligne.

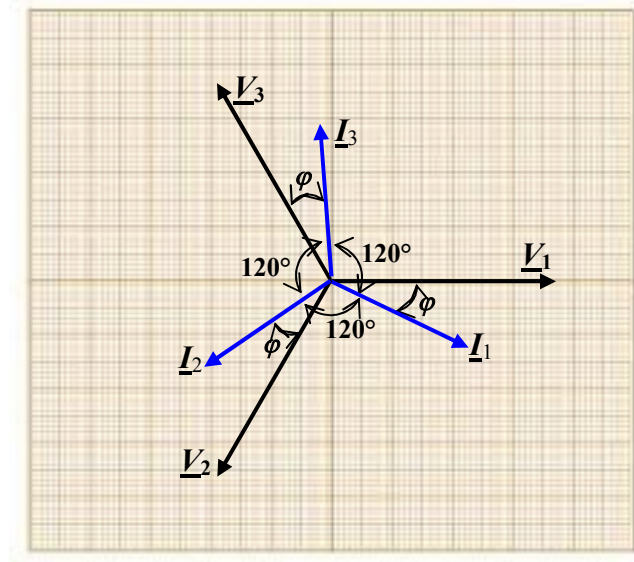


Figure IV.10 : Représentation de Fresnel du système triphasé de courants

Les courants \underline{I}_1 , \underline{I}_2 et \underline{I}_3 forment un système triphasé de courants, avec un déphasage de 120° entre eux et déphasés de $-\varphi$ par rapport au système des tensions simples.

Comme pour le système triphasé de tensions, la somme des trois courants \underline{I}_1 , \underline{I}_2 et \underline{I}_3 est nulle :

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0} \quad (\text{IV.15})$$

Or : $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{I}_N$ (cf. fig. IV.9). Par conséquent, le courant dans le neutre est nul, ce qui permet de supprimer le fil du neutre.

IV.4.2.2 Disposition ou couplage triangle (symbole Δ ou D)

Chaque dipôle est relié entre deux phases différentes (neutre non utilisé). Les trois dipôles forment alors un triangle dont les sommets sont reliés aux trois lignes.

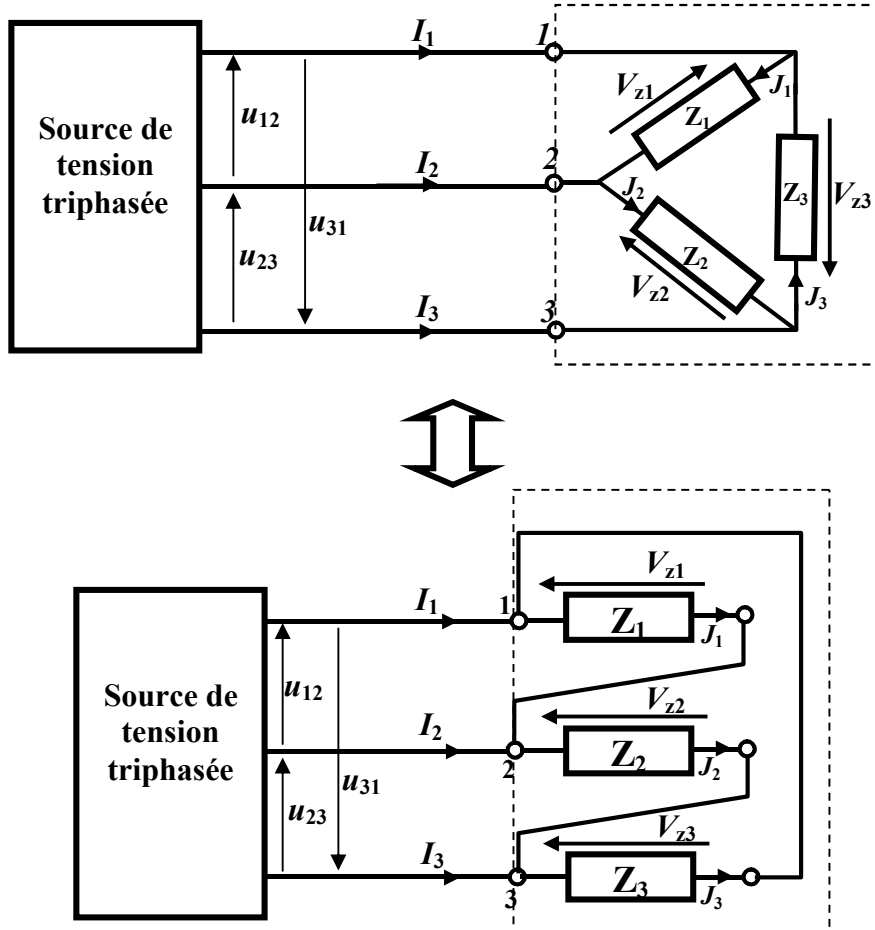


Figure IV.11 : Récepteur couplé en triangle

a- Etude des tensions

Dans le couplage triangle, les trois dipôles de la charge sont soumis aux tensions composées (cf. fig. IV.11). En effet :

$$\underline{V}_{z1} = \underline{u}_{12}, \underline{V}_{z2} = \underline{u}_{23} \text{ et } \underline{V}_{z3} = \underline{u}_{31} \tag{IV.16}$$

b- Etude des courants

Les courants dans la ligne (\underline{I}_1 , \underline{I}_2 et \underline{I}_3) sont différents des courants dans les dipôles (\underline{J}_1 , \underline{J}_2 et \underline{J}_3) $\Rightarrow \underline{I}_i \neq \underline{J}_i$.

On peut calculer les courants de phase comme suit ;

$$\begin{cases} \underline{J}_1 = \frac{u_{12}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j\pi/6}}{Ze^{j\varphi}} = Je^{j(\pi/6-\varphi)} \\ \underline{J}_2 = \frac{u_{23}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j(-\pi/2)}}{Ze^{j\varphi}} = Je^{j(-\pi/2-\varphi)} \\ \underline{J}_3 = \frac{u_{31}}{\underline{Z}} = \frac{Ue^{j(-7\pi/6)}}{Ze^{j\varphi}} = Je^{j(-7\pi/6-\varphi)} \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

Avec $J = \frac{U}{Z}$, la valeur efficace des courants de phase.

Les courants de phase \underline{J}_1 , \underline{J}_2 et \underline{J}_3 forment un système triphasé de courants, avec un déphasage de 120° entre eux et déphasés de $-\varphi$ par rapport au système des tensions composées, fig. IV.12.

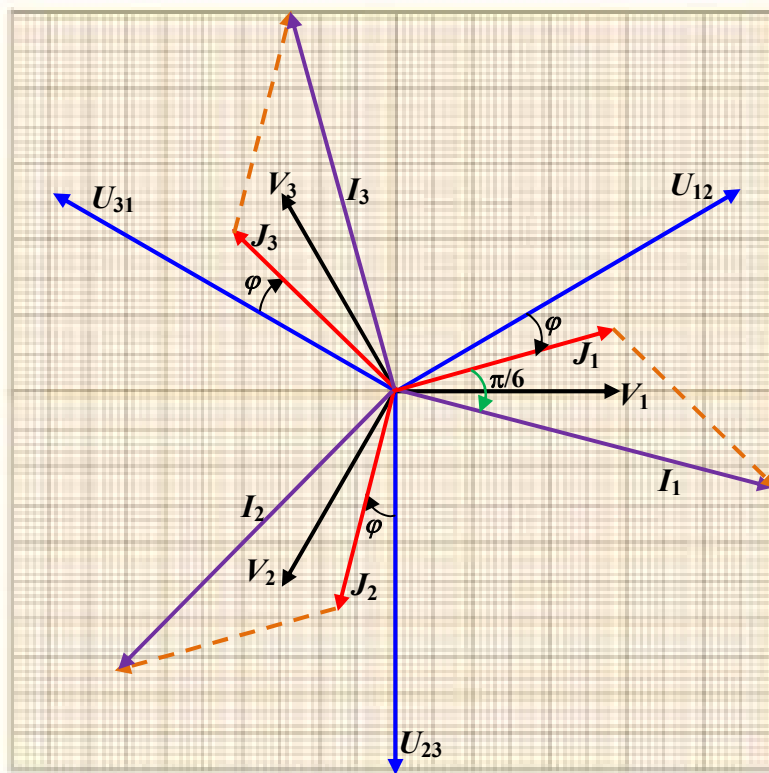


Figure IV.12 : Représentation vectorielle du système triphasé des courants de phase et de ligne.

On calcule les courants de ligne en utilisant la loi des nœuds :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{J}_1 - \underline{J}_3 = Je^{j(\pi/6-\varphi)} - Je^{j(-7\pi/6-\varphi)} = J\sqrt{3}.e^{-j\varphi} \\ \underline{I}_2 = \underline{J}_2 - \underline{J}_1 = Je^{j(-\pi/2-\varphi)} - Je^{j(\pi/6-\varphi)} = J\sqrt{3}.e^{-j(\varphi+\frac{2\pi}{3})} \\ \underline{I}_3 = \underline{J}_3 - \underline{J}_2 = Je^{j(-7\pi/6-\varphi)} - Je^{j(-\pi/2-\varphi)} = J\sqrt{3}.e^{-j(\varphi+\frac{4\pi}{3})} \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - 2\pi/3) \\ i_3(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - 4\pi/3) \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Comme pour la relation entre les modules d'une tension simple et d'une tension composée ($U = \sqrt{3} \times V$), le module des courants de ligne est $I = \sqrt{3} \times J$.

Les courants de ligne forment aussi un système triphasé équilibré en retard de $\pi/6$ sur celui des courants de phase.



Dans la pratique, les récepteurs des installations électriques triphasées ne sont pas toujours équilibrés. Par conséquent, les courants triphasés dans ces installations peuvent avoir des valeurs efficaces différentes, présenter des déphasages différents ou même avoir des formes non-sinusoïdales. Les relations présentées en haut ne s'appliquent évidemment pas à ces cas.

Remarque : Le choix du mode de couplage (étoile ou triangle) d'un récepteur triphasé est déterminé par la valeur de la tension nominale que peut supporter un dipôle de ce récepteur (voir sa plaque signalétique).

c- Exemple

Soit la plaque signalétique d'un moteur triphasé :

Moteur 3~ Type : xxxx Modèle : yyyy					
V	Hz	Min ⁻¹	kW	cosφ	A
Y 380	50	1485	1.1	0.8	4.8
Δ 220					2.8

La plaque montre que le moteur peut être couplé en étoile ou en triangle Y/Δ (les 6 bornes des enroulements sont disponibles). La tension la plus faible indiquée (220V) correspond à la tension supportée par un enroulement (une phase) du moteur. Il appartient alors à l'utilisateur de veiller à ne pas dépasser cette valeur lors du couplage du moteur au réseau d'alimentation.

- Pour un réseau **127/220 V** (127V = tension simple, 220V = tension composée)
⇒ **Couplage Δ** des enroulements du moteur.
- Pour un réseau **220/380 V** (220V = tension simple, 380V = tension composée)
⇒ **Couplage Y** des enroulements du moteur.
- Pour un réseau **380/660 V** (380V = tension simple, 660V = tension composée)
⇒ **Couplage impossible** du moteur.



La puissance active indiquée sur les plaques signalétiques des moteurs correspond à la puissance utile (puissance fournie) et non pas à la puissance absorbée !

IV.5 PUISSANCE ÉLECTRIQUE EN TRIPHASÉ

IV.5.1 Puissance instantanée

Par application du théorème de Boucherot, la puissance instantanée absorbée par une charge triphasée constituée de trois dipôles est la somme des puissances consommées par chaque phase :

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) \quad (\text{IV.20})$$

Avec :

$$\begin{aligned} p_1(t) &= v_1(t) \times i_1(t) = 2VI \sin(\omega t) \times \sin(\omega t - \varphi) \\ &= V.I [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)] \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= v_2(t) \times i_2(t) = 2VI \sin(\omega t - 2\frac{\pi}{3}) \times \sin(\omega t - 2\frac{\pi}{3} - \varphi) \\ &= V.I \left[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - 4\frac{\pi}{3} - \varphi) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

$$\begin{aligned} p_3(t) &= v_3(t) \times i_3(t) = 2VI \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \times \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) \\ &= V.I \left[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \varphi) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

$$\Rightarrow p(t) = 3V.I.\cos(\varphi) - V.I \left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \varphi) \right)$$

D'après les relations trigonométriques ;

$$\begin{aligned} \left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \varphi) \right) &= 0 \\ \Rightarrow p(t) = P = 3.V.I.\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Contrairement à la puissance instantanée absorbée par une charge monophasée qui varie en fonction du temps (cf. § I.5.1), la puissance instantanée absorbée par une charge triphasée équilibrée est constante et égale à la puissance active totale :

$$P_{3\phi} = 3.V.I.\cos(\varphi) \quad (\text{IV.24})$$

V et I sont des grandeurs de phase et φ le déphasage entre eux provoqué par le dipôle.

De même, la puissance réactive absorbée par la charge triphasée est donnée par :

$$Q_{3\phi} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3.V.I.\sin(\varphi) \quad (\text{IV.25})$$

D'où la puissance apparente :

$$S_{3\phi} = \sqrt{P_{3\phi}^2 + Q_{3\phi}^2} = 3.V.I \quad (\text{IV.26})$$

IV.5.2 Expressions des puissances en fonction du mode de couplage

IV.5.2.1 Couplage en étoile de la charge (cf. fig. IV.9):

➤ **Puissance active :**

$$P_Y = P_1 + P_2 + P_3 = 3 \times V_z J \cos(\varphi)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} V_z = V = U / \sqrt{3} \\ J = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_Y = 3 \times V \cdot I \cos(\varphi) = 3 \times \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cos(\varphi) = \sqrt{3} UI \cos(\varphi)$$

➤ **Puissance réactive :**

$$Q_Y = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3 \times V_z J \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow Q_Y = 3 \times VI \sin(\varphi) = \sqrt{3} UI \sin(\varphi)$$

➤ **Puissance apparente :** $S_Y = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3VI = \sqrt{3} UI$

IV.5.2.2 Couplage en triangle de la charge (cf. fig. IV.11)

➤ **Puissance active :**

$$P_\Delta = P_1 + P_2 + P_3 = 3 \times V_z J \cos(\varphi)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} V_z = U \\ J = I / \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P_\Delta = 3 \times U \cdot J \cos(\varphi) = 3 \times U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cos(\varphi) = \sqrt{3} UI \cos(\varphi)$$

➤ **Puissance réactive :**

$$Q_\Delta = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3 \times V_z J \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow Q_\Delta = 3 \times UJ \sin(\varphi) = \sqrt{3} UI \sin(\varphi)$$

➤ **Puissance apparente :** $S_\Delta = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3UJ = \sqrt{3} UI$

Conclusion : D'une manière générale, et quel que soit le couplage utilisé, on peut exprimer les puissances consommées par les mêmes formules en utilisant les **grandeurs de ligne**:

$$P = \sqrt{3} UI \cos(\varphi)$$

$$Q = \sqrt{3} UI \sin(\varphi) \tag{IV.27}$$

$$S = \sqrt{3} UI$$

Avec U la tension composée (mesurée entre deux phases), I le courant de ligne et φ le déphasage entre la tension simple (V) et le courant de ligne quel que soit le couplage du récepteur.

L'avantage de ces expressions générales est qu'elles permettent de calculer les puissances relatives à une charge même si elle n'est pas accessible (inconnue).

IV.5.3 Théorème de Boucherot

Comme en monophasé le théorème de Boucherot s'applique aussi au calcul des puissances actives et réactives mise en jeux dans un réseau triphasé quel que soit le mode de couplage utilisé.

- La puissance active totale est la somme des puissances actives individuelles :

$$P_T = \sum_1^N P_k \quad (\text{IV.28})$$

- La puissance réactive totale est la somme des puissances réactives individuelles :

$$Q_T = \sum_1^N Q_k \quad (\text{IV.29})$$

- La puissance apparente totale est donnée par :

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \quad (\text{IV.30})$$



Le théorème de Boucherot s'applique uniquement aux circuits électriques dont les courants et les tensions sont sinusoïdaux de mêmes fréquences

IV.5.4 Facteur de puissance

Le facteur de puissance est le rapport de la puissance active à la puissance apparente :

$$K = \frac{P_{3\phi}}{S_{3\phi}} = \frac{\sqrt{3}UI \cos(\varphi)}{\sqrt{3}UI} = \cos \varphi \quad (\text{IV.31})$$

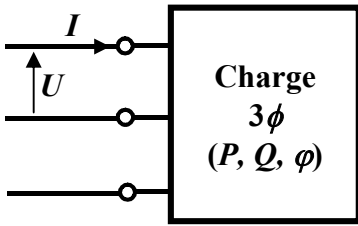
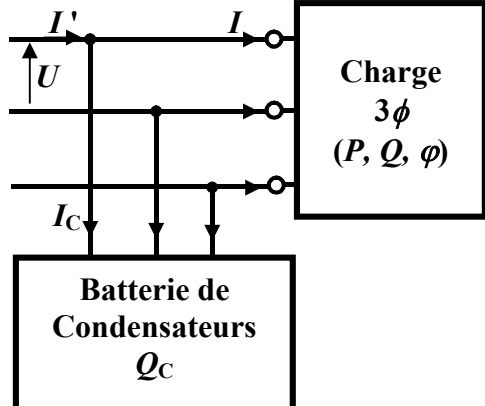
IV.5.5 Relèvement du facteur de puissance

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le courant absorbé par une installation est d'autant plus faible que le $\cos(\varphi)$ est grand (en monophasé : $I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$).

Comme $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$, plus Q est faible plus $\cos(\varphi)$ est grand et se rapproche de 1.

L'amélioration (relèvement) du facteur de puissance passe par la diminution de la puissance réactive totale (Q) consommée par l'installation. Il est donc nécessaire de joindre à cette dernière un composant pouvant modifier Q sans modifier la puissance active P . Ces composants sont soit le condensateur soit la bobine parfaite. Comme la plupart des installations électriques sont de nature inductive (transformateurs, moteurs, éclairage, ...), donc consommant de l'énergie réactive ($Q > 0$), on améliore leurs facteurs de puissance en installant en parallèle des condensateurs. Ces derniers vont produire la puissance réactive Q_C permettant de diminuer la puissance réactive initiale Q en une puissance réactive Q' (valeur diminuée souhaitée).

On doit dimensionner le condensateur en fonction du facteur de puissance recherché ($\cos \varphi'$). Le tableau ci-dessous résume les deux situations ; initiale (Charge seule) et modifiée (Charge + condensateurs).

	Charge seule	Charge + Condensateur
		
Puissance active	P	$P' = P$
Puissance réactive	$Q = P \operatorname{tg}(\varphi)$	$Q' = Q + Q_c = P \operatorname{tg}(\varphi')$

D'après le tableau ci-dessus, on peut faire le bilan des puissances ;

$$Q' = Q + Q_c = P \operatorname{tg}(\varphi) + Q_c = P \operatorname{tg}(\varphi')$$

$$\Rightarrow Q_c = P \operatorname{tg}(\varphi') - P \operatorname{tg}(\varphi) = P(\operatorname{tg}(\varphi') - \operatorname{tg}(\varphi)) \quad (\text{IV.32})$$

Dans une installation triphasée, les condensateurs constituent une charge triphasée (03 dipôles) et peuvent donc être disposés soit en étoile soit en triangle, ce qui donne deux calculs différents de la puissance réactive Q_c .

IV.5.5.1 Couplage des condensateurs en étoile :

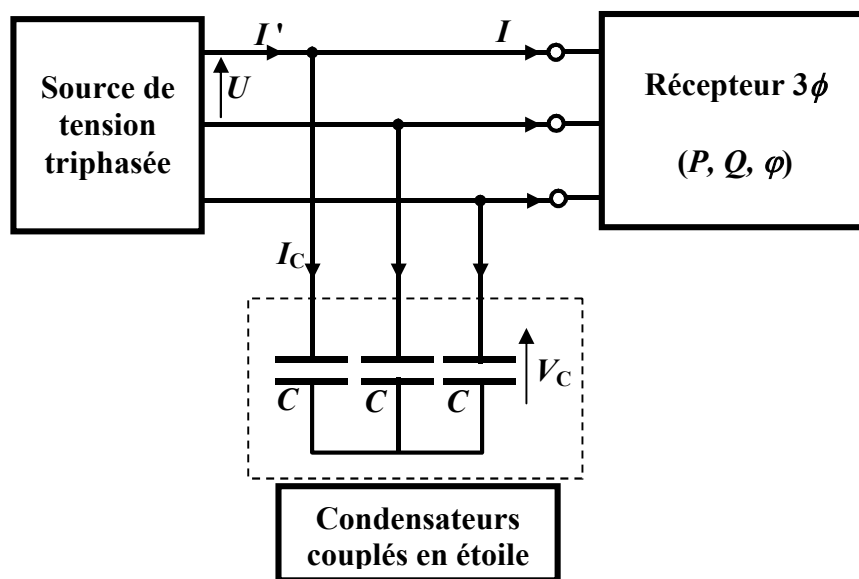


Figure IV.13 : Amélioration du $\cos \varphi$ à l'aide de condensateurs couplés en étoile

- Calcul de la valeur de Q_C :

$$\begin{aligned} Q_{C/Y} &= 3V_C I_C \sin(\varphi_C) = 3V_C I_C \sin(-\pi/2) = -3V_C I_C \\ &= -3V_C \left(\frac{V_C}{X_C} \right) = -3 \frac{V_C^2}{X_C} = -3 \frac{V_C^2}{1/C\omega} \\ &= -3C\omega V_C^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

$$\text{Or : } V_C = V = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow Q_{C/Y} = -3C\omega \left(\frac{U}{\sqrt{3}} \right)^2 = -C\omega U^2 \quad (\text{IV.34})$$

$$\Rightarrow -C\omega U^2 = P \operatorname{tg}(\varphi') - P \operatorname{tg}(\varphi)$$

$$\text{Finalement : } C_Y = \frac{P(\operatorname{tg}(\varphi) - \operatorname{tg}(\varphi'))}{\omega U^2} \quad (\text{IV.35})$$

IV.5.5.2 Couplage des condensateurs en triangle

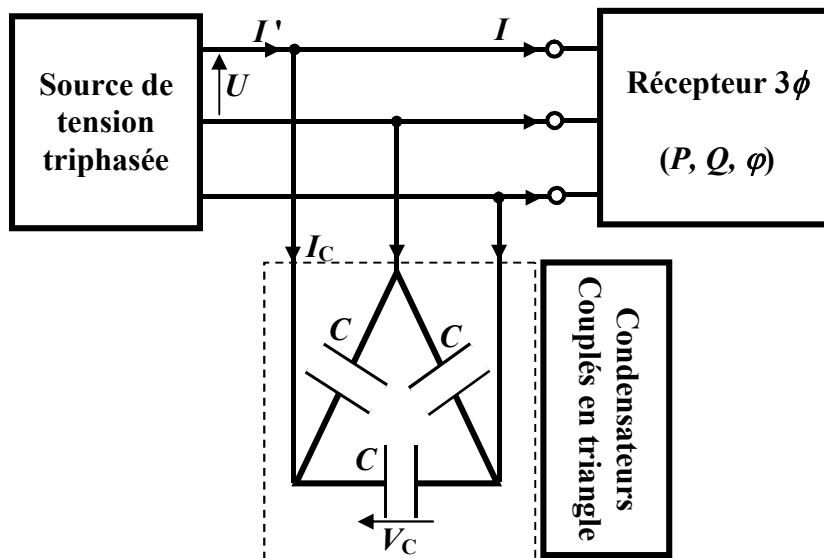


Figure IV.14 : Amélioration du $\cos \varphi$ à l'aide de condensateurs couplés en triangle

- Calcul de la valeur de Q_C :

$$Q_{C/\Delta} = -3C\omega V_C^2 \quad (\text{IV.36})$$

$$\text{Or : } V_C = U \Rightarrow Q_{C/\Delta} = -3C\omega U^2$$

$$\Rightarrow -3C\omega U^2 = P \operatorname{tg}(\varphi') - P \operatorname{tg}(\varphi)$$

$$\text{Finalement : } C_{\Delta} = \frac{P(\operatorname{tg}(\varphi) - \operatorname{tg}(\varphi'))}{3\omega U^2} \quad (\text{IV.37})$$

Calcul du nouveau courant I' délivré par la source :

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3}U \cdot \cos \varphi'} \quad (\text{IV.38})$$

IV.6 RÉSEAU TRIPHASÉ NON SYMÉTRIQUE

Si on considère que la source triphasée de tension est équilibrée, la charge quant à elle peut présenter un déséquilibre (suite à un défaut par exemple). Dans ce cas, les trois impédances qui forment la charge sont différentes : $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$.

Les tensions composées délivrées par la source triphasée sont supposées dans tous les cas comme équilibrées : $U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$.

IV.6.1 Conséquence du déséquilibre sur une charge montée en étoile

IV.6.1.1 Cas où le neutre est relié

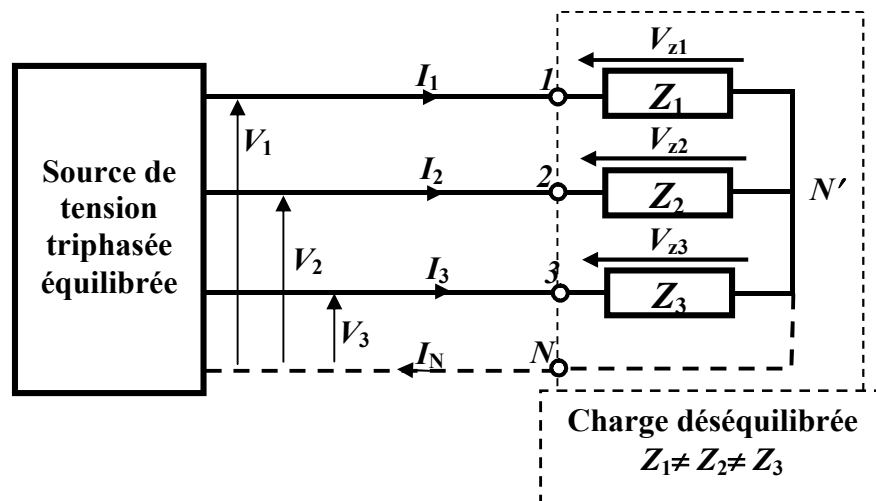


Figure IV.15 : Récepteur triphasé en étoile déséquilibré

En présence du neutre, les tensions simples aux bornes de la charge restent équilibrées :

$$V_1 = V_2 = V_3 = V \quad (\text{IV.39})$$

Comme conséquence au déséquilibre de la charge, les courants de lignes ne sont pas égaux.

En effet, si $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3 \Rightarrow \begin{cases} Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \\ \varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{V e^{j0}}{Z_1 e^{j\varphi_1}} = I_1 e^{j(-\varphi_1)} \\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{V e^{j(-2\pi/3)}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = I_2 e^{j(-2\pi/3-\varphi_2)} \\ \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{V e^{j(-4\pi/3)}}{Z_3 e^{j\varphi_3}} = I_3 e^{j(-4\pi/3-\varphi_3)} \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

La somme des trois courants en ligne n'est plus nulle. Par conséquent, le courant dans le neutre est lui aussi non nul :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_N \neq 0 \quad (\text{IV.41})$$

Lors d'un déséquilibre de la charge, un courant non nul circule dans le conducteur de neutre. Ce courant peut être détecté par les appareils de mesure pour éventuellement agir.

Remarque : Le point N' est forcé au potentiel 0 ($V_{N'} = V_N = 0$ V)

IV.6.1.2 Cas où le neutre n'est pas relié

Si le neutre n'est pas disponible (ou pas relié) alors :

- Les tensions simples aux bornes de la charge sont déséquilibrées :

$$\underline{V}_1 \neq \underline{V}_2 \neq \underline{V}_3 \quad (\text{IV.42})$$

- Les courants en ligne sont toujours différents ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$) mais leur somme est nulle :

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0} \quad (\text{IV.43})$$

- Le potentiel du point N' de la charge est *flottant* (non forcé à 0V). Il apparaît alors une tension entre le point N' et le neutre du réseau. Dans ce cas, on peut le calculer grâce au théorème de Millman :

$$\underline{V}_{N'} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_2 \underline{V}_2 + \underline{Y}_3 \underline{V}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad (\text{IV.44})$$

IV.6.2 Conséquence du déséquilibre sur une charge montée en triangle

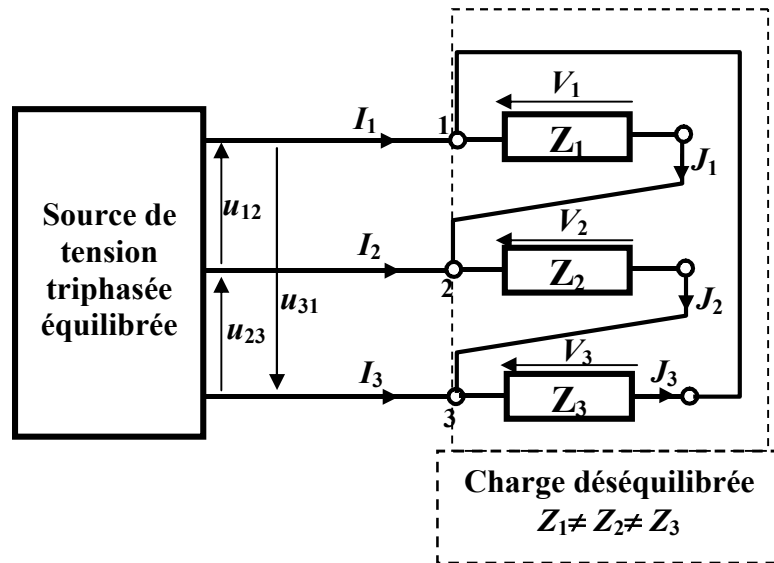


Figure IV.16 : Récepteur triphasé en triangle déséquilibré

Aux bornes de la charge les tensions de phase (V_i) sont égales aux tensions composées délivrées par la source (U_{ij}), elles sont donc équilibrées :

$$V_1 = V_2 = V_3 = U \quad (\text{IV.45})$$

Vu que la charge est déséquilibrée ($Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$), le système des courants de phase est déséquilibré :

$$\underline{J}_1 \neq \underline{J}_2 \neq \underline{J}_3 \quad (\text{IV.46})$$

Il est de même pour les courants de ligne :

$$\underline{I}_1 \neq \underline{I}_2 \neq \underline{I}_3 \quad (\text{IV.47})$$

Mais les sommes des courants restent nulles :

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3 = \vec{0} \quad (\text{IV.48})$$

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0} \quad (\text{IV.49})$$

Remarque : Dans le cas d'une charge déséquilibrée, la relation liant les courants de phase et les courants de lignes ($I = \sqrt{3} \cdot J$) n'est plus valable.

Chapitre V

Mesure de puissance

V.1 INTRODUCTION

En courant continu la puissance est définie par le produit du courant et de la tension ($P=U \times I$), par conséquent, elle peut être mesurée à l'aide de la méthode dite *voltampèremétrique*. Cette méthode n'est pas valable en courant alternatif (sauf cas d'une charge résistive). Cela revient d'abord à l'existence de déphasage entre les courants et les tensions, et ensuite au fait qu'il y'a plusieurs types de puissances en alternatif ; active, apparente et réactive.

Ce chapitre a pour but de décrire les méthodes de mesure de la puissance en régime alternatif sinusoïdal.

V.2 MÉTHODE VOLTAMPÈREMÉTRIQUE

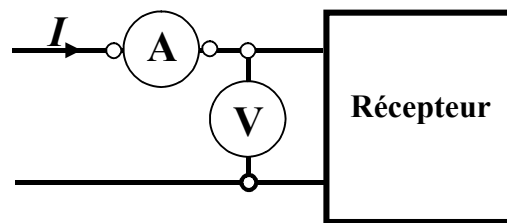


Figure V.1 : Méthode voltampèremétrique

La méthode *voltampèremétrique* permet de mesurer deux types de puissances ;

- a- La puissance en courant continu : $P=U \times I$
- b- La puissance apparente en courant alternatif : $S = U \times I$

V.3 MESURE DE PUISSANCE ACTIVE – LE WATTMÈTRE –

La mesure de la puissance active (P) consommée par un récepteur ou fournie par un générateur s'effectue au moyen d'un appareil de mesure appelé *Wattmètre*. L'appareil possède au moins quatre bornes, deux bornes (V_1, V_2) pour la mesure de la tension et deux bornes (A_1, A_2) pour la mesure du courant.

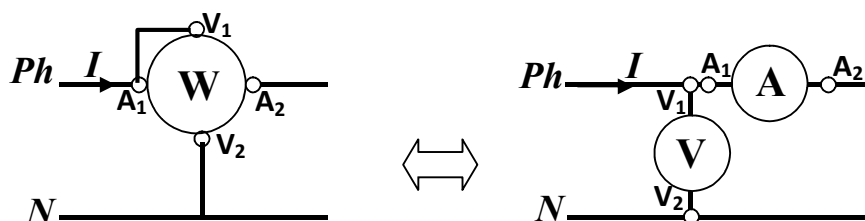


Figure V.2 : Représentation symbolique d'un wattmètre

Les deux bornes réservées à la mesure du courant sont reliées à une bobine courant (identifiée par son gros fil) qui est mise en série dans le circuit de mesure (comme un ampèremètre). Les deux bornes réservées à la mesure de la tension sont reliées à une bobine tension (identifiée par son fil fin) qui est prise en dérivation entre les deux fils du circuit (comme un voltmètre).

Deux montages sont alors possibles : le montage *Amont* (la bobine courant est placée après la bobine tension) et le montage *Aval* (la bobine courant est placée avant la bobine tension).

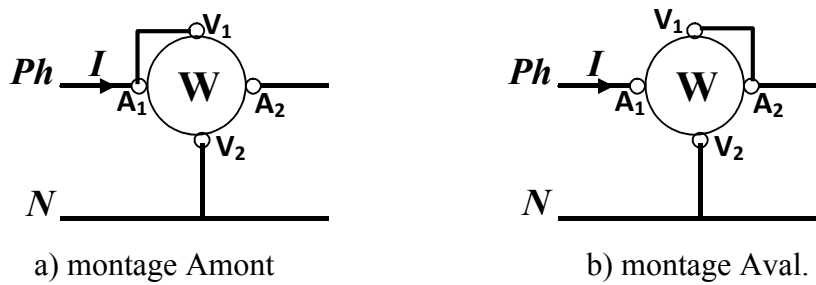


Figure V.3 : Montage amont et aval des bobines du wattmètre

Le wattmètre, qui est à un appareil de type électrodynamique, affiche la valeur moyenne du produit $u(t) \times i(t)$. Dans le cas où ces deux grandeurs sont sinusoïdales et de même fréquence, la valeur indiquée correspond à la puissance active P ;

$$P = \langle u(t) \times i(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt = UI \cos(\varphi) \tag{V.01}$$

Où φ est le déphasage entre le courant et la tension.

Le Wattmètre peut avoir plus de quatre bornes. Dans ce cas, des bornes supplémentaires sont affectées à la mesure de différents calibres de tension et de courant (fig. V.4). Les calibres doivent être choisis en fonction de l'ordre de grandeur des courants et des tensions dans le récepteur et non en fonction de la puissance.



Figure V.4 : Image d'un Wattmètre analogique

V.4 MESURE DE PUISSANCE EN TRIPHASÉ

V.4.1 Méthode des trois wattmètres – Ligne à 04 fils

Dans le cas général (système équilibré ou pas) et en présence du fil neutre, on peut mesurer la puissance consommée par un récepteur triphasé en mesurant chacune des puissances consommées par les trois phases.

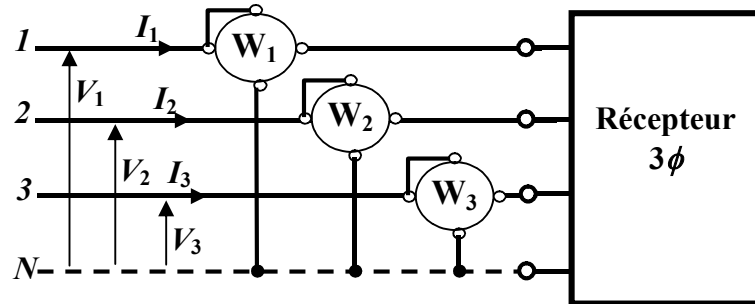


Figure V.5 : Mesure de P – méthode des trois wattmètres –

La puissance active totale est alors égale à la somme des indications des trois wattmètres :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (\text{V.02})$$

Remarque :

- Dans le cas où le système est équilibré (ligne à 04 fils), la puissance active peut être mesurée en utilisant un seul wattmètre. L'appareil est alors placé sur l'une des phases et la puissance totale consommée est : $P = 3 \times P_1$
- Si le fil neutre n'est pas disponible (ligne à 03 fils), on crée un fil neutre artificiel à l'aide de trois impédances identiques.

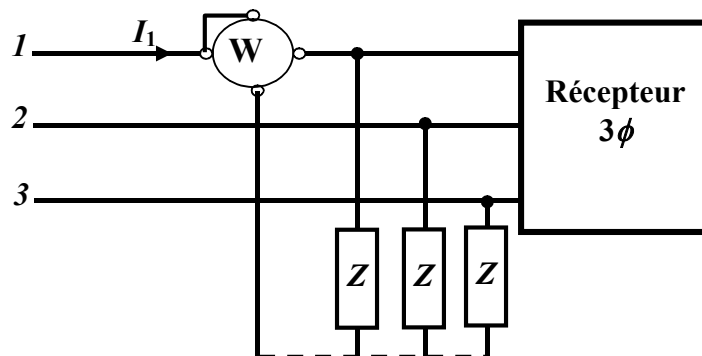


Figure V.6 : Ligne à 03 fils avec fil neutre artificiel

V.4.2 Méthode des deux wattmètres – Ligne à 03 fils

Si le neutre n'est pas disponible, on peut mesurer la puissance à l'aide de deux wattmètres seulement :

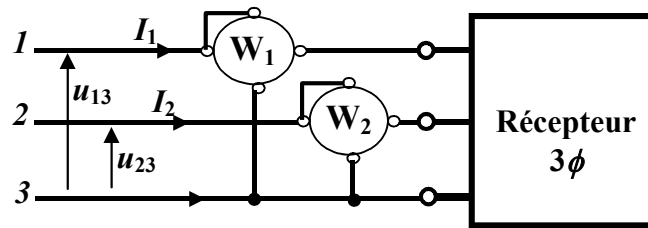


Figure V.7 : Mesure de P – méthode des deux wattmètres –

L'indication des deux wattmètres est alors :

- Wattmètre W_1 :

$$W_1 = u_{13} \times I_1 \times \cos(\overrightarrow{u_{13}}, \overrightarrow{I_1}) \quad (\text{V.03})$$

L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u_{13}}$ et $\overrightarrow{I_1}$ est défini sur la figure V.8 :

$$(\overrightarrow{u_{13}}, \overrightarrow{I_1}) = \theta_{1-13} = \frac{\pi}{6} - \varphi \quad (\text{V.04})$$

$$\Rightarrow W_1 = u_{13} \times I_1 \times \cos(\theta_{1-13}) = u_{13} \times I_1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$$

$$W_1 = U \times I \times \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \quad (\text{V.05})$$

- Wattmètre W_2 :

$$W_2 = u_{23} \times I_2 \times \cos(\overrightarrow{u_{23}}, \overrightarrow{I_2}) \quad (\text{V.06})$$

L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u_{23}}$ et $\overrightarrow{I_2}$ est défini sur la figure V.8 :

$$(\overrightarrow{u_{23}}, \overrightarrow{I_2}) = \theta_{2-23} = \frac{\pi}{6} + \varphi \quad (\text{V.07})$$

$$\Rightarrow W_2 = u_{23} \times I_2 \times \cos(\theta_{2-23}) = u_{23} \times I_2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$$

$$W_2 = U \times I \times \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \quad (\text{V.08})$$

Les deux indications W_1 et W_2 , prises individuellement, n'ont aucun sens. Mais le calcul de leurs sommes donne :

$$W_1 + W_2 = U \times I \times \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + U \times I \times \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$$

$$W_1 + W_2 = U \times I \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right) = 2UI \cos(\pi/6) \cos(\varphi) \quad (\text{V.09})$$

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3}UI \cos \varphi = P$$



La somme des indications des deux wattmètres est égale à la puissance active totale consommée par le récepteur

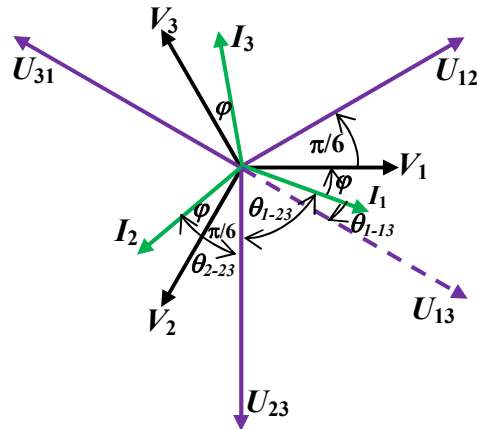


Figure V.8 : Représentation des déphasages (méthode des deux wattmètres)

V.5 MESURE DE LA PUISSANCE RÉACTIVE

a- Dans la méthode précédente des 02 wattmètres, le calcul de la différence des deux indications donne :

$$W_1 - W_2 = U \times I \times \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - U \times I \times \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$$

$$W_1 - W_2 = U \times I \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right) = 2UI \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow W_1 - W_2 = UI \sin \varphi \quad (\text{V.10})$$



La différence des indications des deux wattmètres est égale à une puissance réactive

$\Rightarrow Q = \sqrt{3} \times (W_1 - W_2)$: c'est la puissance réactive totale consommée par le récepteur



La méthode des deux wattmètres permet de déterminer la puissance réactive uniquement dans le cas d'un système équilibré

b- On peut également mesurer la puissance réactive à l'aide d'un seul wattmètre (charge équilibrée). Le courant est mesuré sur l'une des phases de la ligne et le circuit tension est pris entre les deux autres phases.

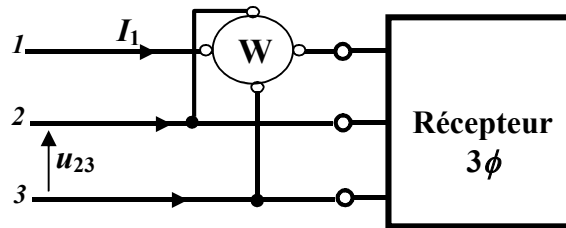


Figure V.9 : Mesure de puissance réactive

L'indication du wattmètre est :

$$W = u_{23} \times I_1 \times \cos(\overrightarrow{u_{23}}, \overrightarrow{I_1}) \quad (\text{V.11})$$

L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u_{23}}$ et $\overrightarrow{I_1}$ est défini sur la figure V.8 :

$$(\overrightarrow{u_{23}}, \overrightarrow{I_1}) = \theta_{1-23} = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (\text{V.12})$$

$$\Rightarrow W = u_{23} \times I_1 \times \cos(\theta_{1-23}) = U \times I \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \quad (\text{V.13})$$

$\Rightarrow Q = \sqrt{3} \times W$: c'est la puissance réactive totale consommée par le récepteur.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ESTIBALS & S. WEBER, «*Électronique, tout le cours en fiches*» Edition Dunod, 2015, 435 pages.
- [2] G. Segulier, F. Notelet, «*Électrotechnique Industrielle* », Edition Tec&Doc, 1987, 391 pages.
- [3] J. LAROCHE, «*Introduction à l'électrotechnique – fondements d'électricité et d'électromagnétisme*», Edition Dunod, 2002, 248 pages.
- [4] F. DE COULON & M. JUFER, «*Traité d'électricité– Introduction à l'électrotechnique*», Edition Dunod, 1984, 347 pages.
- [5] G. CHATEIGNER, M. BOES, J.P. CHOPIN & D. VERKINDERE, «*Électricité en 19 fiches– Régimes sinusoïdal et non sinusoïdal* », Edition Dunod, 2008, 160 pages.
- [6] L. LASNE, «*Électrotechnique et énergie électrique* », Edition Dunod, 2013, 317 pages.
- [7] L. LASNE, «*Exercices et problèmes d'électrotechnique* », Edition Dunod, 2011, 265 pages.
- [8] L. LASNE, «*Electrotechnique* », Edition Dunod, 2007, 273 pages.
- [9] J. P. SIX & P. VANDEPLANQUE, «*Exercices et problèmes d'électrotechnique industrielle* », Edition Tec&Doc, 1995, 261 pages.
- [10] A. KASSATKINE, «*Électrotechnique élémentaire* », Edition MIR, 1987, 247 pages.
- [11] H. Fraudet et F. Milsant, «*Cours d'électricité* », Edition Eyrolles, 1974, 450 pages.
- [12] <http://www.epsic.ch/cours/electrotechnique/theorie/index.html>
- [13] <http://sitelec.org/cours2.htm>